И. Л. БАБИНСКАЯ

ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАД

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1975

512
Б 12
УДК 516 (023)

Б $\frac{20202-128}{053(02)\text{-}75}$ 86-75

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий сборник составлен в основном из задач, рекомендованных для областных олимпиад, задач самих олимпиад и подготовительных к ним. Использованы главным образом задачи смоленских олимпиад, а также московских и саратовских, некоторые задачи сборника «Всероссийские математические олимпиады» и заочной математической школы при МГУ.

У каждой задачи (в скобках) указаны классы, для учеников которых она предназначена. Более трудные задачи отмечены одной звездочкой, наиболее трудные — двумя. Задачи снабжены решениями или ответами и указаниями.

В сборник включено несколько задач Всесоюзных математических олимпиад и приведены их решения, предложенные участниками этих олимпиад — учениками математических классов средней школы № 7 города Смоленска Виктором Будаевым, Сергеем Ахулковым, Александром Кочерыгиным, Алексеем Бабинским.

Использованные сборники задач для жюри областных олимпиад подготавливались жюри Всесоюзных математических олимпиад. В этой работе постоянно принимали участие Н. Б. Васильев, В. Л. Гутенмахер и Ю. И. Ионин.

Выражаю искреннюю признательность В. Л. Гутенмахеру, внимательно прочитавшему рукопись, за важные и ценные советы, Р. С. Гутеру за полезные замечания и А. Н. Андреевой, любезно предоставившей мне задачи Саратовской области.

ГЛАВА I

АРИФМЕТИКА

§ 1. Арифметические задачи

1 (4—5). У мальчика столько же сестер, сколько и братьев, а у его сестры вдвое меньше сестер, чем братьев. Сколько в этой семье братьев и сколько сестер?

2 (4—5). В двух пачках всего 30 тетрадей. Если бы из первой пачки переложили во вторую 2 тетради, то в первой пачке стало бы вдвое больше тетрадей, чем во второй. Сколько тетрадей было в каждой пачке?

3 (4—6). Тане не хватало 7 коп., а Гале — 2 коп., чтобы купить по коробке цветных карандашей. Когда они сложили свои деньги, их не хватило даже на покупку одной коробки. Сколько стоит коробка карандашей?

4 (4—6). В коробке лежат карандаши: 7 красных и 5 синих. В темноте берут карандаши. Сколько надо взять карандашей, чтобы среди них было не меньше двух красных и не меньше трех синих?

5 (4—6). В темной кладовой лежат ботинки одного размера: 10 пар черных и 10 пар коричневых. Найти наименьшее число ботинок, которое нужно взять из кладовой, чтобы среди них оказалась хотя бы одна пара (левый и правый ботинок) одного цвета (считать, что в темноте нельзя отличить не только цвет ботинка, но и левый от правого).

6 (4—6). Как от куска материи в 2/3 метра отрезать полметра, не имея под руками метра?

7 (4—6). Колхозник привез на базар огурцы. Когда он стал считать их десятками, то не хватило двух огурцов до полного числа десятков. Когда он стал

считать огурцы дюжинами, то оставалось 8 огурцов. Сколько огурцов привез колхозник, если их было больше 300, но меньше 400?

8 (4—5). Алеша задумал число. Он прибавил к нему 5, потом разделил сумму на три, умножил на 4, отнял 6, разделил на 7 и получил число 2. Какое число задумал Алеша?

9 (4—6). Мать положила на стол сливы и сказала своим трем сыновьям, чтобы они, вернувшись из школы, разделили их поровну. Первым пришел Миша, он взял треть слив и ушел. Потом вернулся из школы Петя, взял треть от лежавших на столе слив и тоже ушел. Затем пришел Коля и тоже взял треть от числа слив, которые он увидел. Сколько слив оставила мать, если Коля взял 4 сливы?

10 (4—6). Колхозница принесла на базар для продажи корзину яблок. Первому покупателю она продала половину всех своих яблок и еще пол-яблока, второму — половину остатка и еще пол-яблока и так далее. Последнему — шестому покупателю — она также продала половину оставшихся яблок и еще пол-яблока, причем оказалось, что она продала все свои яблоки. Сколько яблок принесла для продажи колхозница?

11 (4—5). Некоторое число уменьшили на 7, потом уменьшили в 10 раз и получили число, которое на 34 меньше исходного. Найти исходное число.

12 (4—5). Найти такое число, что если его умножить на 52, затем произведение уменьшить в 5 раз, то получим число, которое на 1974 больше искомого.

13 (4—5). В классе число отсутствующих учеников составляет 1/6 часть от числа присутствующих. После того, как из класса вышел один ученик, число отсутствующих стало равно 1/5 числа присутствующих. Сколько учеников в классе?

14 (4—6). Четверо товарищей купили вместе лодку. Первый внес половину суммы, вносимой остальными; второй — треть суммы, вносимой остальными; третий — четверть суммы, вносимой остальными, а четвертый внес 130 р. Сколько стоит лодка и сколько внес каждый?

15 (4—6). Найти два таких числа, что их сумма втрое больше их разности и вдвое меньше их произведения.

16 (4—6). Сумма двух чисел равна 180, частное от деления большего числа на меньшее равно 5. Найти эти числа.

17 (5—7). Найти частное двух чисел, если оно в два раза меньше одного из них и в шесть раз больше другого.

18 (4—7). В некотором месяце три воскресенья пришлись на четные числа. Какой день недели был 20 числа этого месяца?

19 (5—6). Часы показывают час дня. Найти ближайший момент времени, когда часовая и минутная стрелки совпадут.

20 (5—7). Найти ближайший после 12 часов момент времени, при котором стрелки часов взаимно перпендикулярны.

21 (5—7). Сколько раз в течение суток часовая и минутная стрелки а) совпадают? б) составляют развернутый угол? в) составляют прямой угол?

22 (4—6). В бочке не менее 10 литров бензина. Как отлить из нее 6 литров с помощью девятилитрового ведра и пятилитрового бидона?

23 (4—6). Из восьмилитрового ведра, наполненного молоком, надо отлить 4 литра с помощью пустых трехлитрового и пятилитрового бидонов.

24 (4—6). Двенадцативедерная бочка наполнена керосином. Разлить его на две равные части, пользуясь пустыми пятиведерной и восьмиведерной бочками.

25 (4—6). В бочке находится не менее 13 ведер бензина. Как отлить из нее 8 ведер с помощью девятиведерной и пятиведерной бочек?

26 (4—6). Отцу столько лет, сколько сыну и дочери вместе; сын вдвое старше сестры и на 20 лет моложе отца. Сколько лет каждому?

27 (4—5). Сейчас Сереже 11 лет, а Вове 1 год. Сколько лет будет Сереже и Вове, когда Сережа станет втрое старше Вовы?

28 (4—6). Отец старше сына в 4 раза. Через 20 лет он будет старше сына в 2 раза. Сколько сейчас лет отцу?

29 (5—7). Отец старше сына в 4 раза, а сумма их возрастов составляет 50 лет. Через сколько лет отец станет втрое старше сына?

30 (5—7). Нам обоим вместе 63. Сейчас мне вдвое больше лет, чем было Вам тогда, когда мне было столько лет, сколько Вам сейчас. Сколько сейчас лет мне и сколько Вам?

31 (5—7). Сестре втрое больше лет, чем было брату тогда, когда сестре было столько лет, сколько брату теперь. Когда брату будет столько лет, сколько сестре сейчас, им обоим вместе будет 28 лет. Сколько сейчас лет сестре и сколько брату?

32 (5—7). Когда Коля был молод, как Оля, много лет было тетушке Поле — годом меньше, чем Коле теперь вместе с Олей. Сколько лет было Коле, когда тетушка Поля была в возрасте Коли?

33 (5—6). На конечной остановке в трамвай сели пассажиры и половина их заняла места для сидения. Сколько человек сели на конечной остановке в трамвай, если после первой остановки число пассажиров увеличилось на 8% и известно, что трамвай вмещает не больше 70 человек?

34 (5—6). Морская вода содержит 5% соли (по весу). Сколько килограммов пресной воды нужно прибавить к 40 кг морской воды, чтобы содержание соли в смеси составляло 2%?

35 (5—6). Рыночная цена картофеля в связи с ненастной погодой повысилась на 20%. Через некоторое время цена картофеля на рынке понизилась на 20%. Когда картофель стоил дешевле: до повышения или после снижения цены и на сколько процентов?

36 (5—7). Двое учащихся — высокий и маленький — вышли одновременно из одного и того же дома в одну школу. У одного из них шаг был на 20% короче, чем у другого, но зато он успевал за то же время делать на 20% больше шагов, чем другой. Кто из них раньше пришел в школу?

37 (5—6). Влажность свежескошенной травы 60%, сена 15%. Сколько сена получится из одной тонны свежескошенной травы?

38 (5—7). Цена входного билета на стадион составляла 20 коп. После снижения входной платы число зрителей увеличилось на 25%, а выручка возросла на 12,5%. Сколько стал стоить входной билет после снижения цены?

39 (5—7). Автомобиль из A в B ехал со средней скоростью 50 км/час, а обратно возвращался со скоростью 30 км/час. Какова его средняя скорость?

40 (6—7). Два грузовика одновременно вышли из A в B. Первый половину времени, затраченного им на весь путь, шел со скоростью 50 км/час, а остальную часть времени шел со скоростью 40 км/час. Второй грузовик первую половину пути шел со скоростью 40 км/час, а вторую — со скоростью 50 км/час. Какой из этих грузовиков раньше прибыл в B?

41 (5—7). Поезд проходит мост длиной в 450 м за 45 секунд и 15 секунд идет мимо телеграфного столба. Вычислить длину поезда и его скорость.

42 (5—6). Пароход идет от Горького до Астрахани 5 суток, а обратно — 7 суток. Сколько времени плывут плоты от Горького до Астрахани?

43 (5—7). Велосипедист проехал 5/7 пути и еще 40 км и ему осталось 0,75 пути без 118 км. Как велик его путь?

44 (6—7). Пловец плывет вверх против течения Невы. Возле Республиканского моста он потерял пустую флягу. Проплыв еще 20 минут против течения, он заметил свою потерю и вернулся догонять флягу; догнал он ее возле моста лейтенанта Шмидта. Какова скорость течения Невы, если расстояние между мостами равно 2 км?

45 (5—7). Инженер ежедневно приезжал на станцию в одно и то же время, и в это же время за ним подъезжала машина, на которой он ехал на завод. Однажды инженер приехал на станцию на 55 минут раньше обычного, сразу пошел навстречу машине и приехал на завод на 10 минут раньше обычного. Во сколько раз скорость инженера меньше скорости машины?

46* (7—9). На участке трамвайного пути длиной в 1 км пешеход, проходящий этот участок в течение 12 секунд, ежедневно подсчитывал число трамваев, его обгоняющих и встречных. В течение года первых оказалось 225, вторых — 600. Определить скорость трамвая.

47* (6—8). Турист отправляется в поход из A в B и обратно и проходит весь путь за 3 часа 41 минуту. Дорога из A в B идет сначала в гору, потом по ровному месту и затем под гору. На каком протяжении дорога проходит по ровному месту, если скорость туриста составляет при подъеме в гору 4 км/час, на ровном месте 5 км/час и при спуске с горы 6 км/час, а расстояние AB равно 9 км?

48 (4—6). а) Записать с помощью четырех цифр — двоек, знаков действий и, быть может, скобок, числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10.

б) (6—7). Можно ли так записать число 7?

49 (6—7). Написать число 100: а) шестью одинаковыми цифрами, б) девятью разными значащими цифрами.

50 (6—7). Написать число 9 десятью различными цифрами.

51 (4—5). Сумма цифр двузначного числа равна наибольшему из однозначных чисел, а число десятков на 2 меньше этой суммы. Какое это число?

52 (4—5). Сумма цифр двузначного числа равна наименьшему из двузначных чисел, а цифра десятков в четыре раза меньше цифры единиц. Найти число.

53 (5—6). Написать наибольшее целое число, а) в котором все цифры различны, б) в котором все цифры различны и которое делится на 4.

54 (5—6). Написать наименьшее целое число, составленное из всех цифр, которое делится а) на 5, б) на 20.

55 (5—7). Расставьте в записи

$$4 \cdot 12 + 18 : 6 + 3$$

скобки так; чтобы получилось а) число 50, б) наименьшее возможное число, в) наибольшее возможное число.

56 (4—6). В записи 88888888 поставьте между некоторыми цифрами знак сложения так, чтобы получилось выражение, значение которого равно 1000.

57 (4—6). Записаны подряд двадцать пятерок 5 5 5 ... 5 5. Поставьте между некоторыми цифрами знак сложения так, чтобы сумма равнялась 1000.

58 (4—7). В выражении $1:2:3:4:5:6:7:8:9$ расставить скобки так, чтобы результат был а) минимальным, б) максимальным.

59 (4—6). Найти целое число, которое в семь раз больше цифры его единиц.

60 (5—7). Трехзначное число начинается цифрой 4. Если эту цифру перенести в конец числа, то получим число, составляющее 3/4 исходного. Найти исходное трехзначное число.

61 (5—7). Найти двухзначное число, которое от перестановки его цифр увеличивается в 4,5 раза.

62 (5—8). Некоторое число оканчивается на 2. Если эту цифру перенести в начало числа, то число удвоится. Найти наименьшее такое число.

63 (6—7). Найти цифры сотен и единиц числа 42 * 4 *, если известно, что оно делится на 72.

64 (7—9). Найти два трехзначных числа, зная, что их сумма кратна 498, а частное кратно 5.

65 (6—8). Все двузначные числа, не оканчивающиеся нулем, выписывают одно за другим так, что каждое следующее начинается с той же цифры, которой оканчивается предыдущее. Получается некоторое многозначное число. Из всех многозначных чисел, которые можно получить таким образом, выбирают наименьшее и наибольшее. Найти их сумму.

66 (5—8). Из числа 1234567 ... 5657585960 вычеркнуть 100 цифр так, чтобы оставшееся число было:

а) наименьшим;

б) наибольшим.

67 (5—8). Доказать, что число 11 ... 11 (восемьдесят одна единица) делится на 81.

68 (5—8). Двое A и B играют в такую игру: поочередно называют целые положительные числа, причем игрок A называет число не большее 10, игрок B называет число, превышающее число, названное игроком A, но не более чем на 10 и т. д. Выигрывает тот, кто назовет число 100. Как должен играть A, чтобы заведомо выиграть?

69 (6—8). Квадрат числа состоит из цифр 0; 2; 3; 5. Найти его.

70 (6—8). Сумма нескольких чисел равна единице. Может ли сумма их квадратов быть меньше 0,01?

71 (6—9). Доказать, что любую сумму, не меньшую чем 8 коп., можно выплатить лишь монетами, достоинством в 3 коп. и 5 коп.

72* (6—8). Сколькими способами монету в 20 коп. можно разменять монетами, достоинством в 10, 5, 3 и 2 коп.?

73* (7—10). В городской автобус без кондуктора вошли 20 человек. Оказалось, что ни у одного из них нет медных монет, а есть лишь серебряные. Тем не менее им удалось рассчитаться друг с другом и опустить в кассу монеты на сумму в один рубль. Какое наименьшее число монет у них было, когда они садились в автобус?

74 (5—7). Сколько имеется двузначных чисел, у которых а) среди цифр есть хоть одна пятерка? б) цифра десятков меньше цифры единиц? в) цифра десятков больше цифры единиц?

75 (5—7). Подряд выписаны все целые числа от 1 до 100. Сколько раз в этой записи встречаются цифры: а) нуль? б) единица? в) три?

76 (6—9). Сколько среди целых чисел от 10 до 1000 таких, а) в записи которых встречаются ровно три одинаковые цифры? б) у которых каждая последующая цифра больше предыдущей? в) у которых сумма цифр равна 9?

77 (7—10). Сколько среди целых чисел от 100 до 10 000 таких, в записи которых встречаются ровно 3 одинаковые цифры?

78 (6—8). Каково наибольшее число квартир в стоквартирном доме, у которых сумма цифр номера одинакова?

79 (6—8). Четыре последовательных целых числа являются цифрами тысяч, сотен, десятков и единиц некоторого четырехзначного числа. На сколько увеличится это число, если его цифры написать в обратном порядке?

80 (5—7). При сложении двух целых чисел ученик по ошибке поставил во втором слагаемом лишний нуль на конце и получил в сумме 6641 вместо 2411. Определить слагаемые.

81 (7—10). Доказать, что являются точными квадратами все числа вида а) 16; 1156; 111 556 и т. д. (в середину предыдущего числа вставляется число 15), б) 49; 4489; 444 889 и т. д. (в середину предыдущего числа вставляется число 48).

82 (7—10). Докажите, что число $11 \ldots 1122 \ldots 22$ (состоящее из 100 единиц и 100 двоек) есть произведение двух последовательных целых чисел.

83 (7—10). Что больше: а) 5^{300} или 3^{500}? б) 2^{700} или 5^{300}? в) 2^{300} или 3^{200}?

84 (6—8). Числа 2^{1971} и 5^{1971} выписаны одно за другим. Сколько всего цифр выписано?

85** (7—10). Можно ли все десятизначные числа, записываемые при помощи цифр 1 и 2, разбить на две группы так, чтобы сумма двух любых чисел из одной группы содержала в своей десятичной записи не менее двух троек?

86** (8—10). Даны две группы подряд расположенных натуральных чисел, в каждой по k чисел. При каких k эти группы чисел можно, изменив порядок, подписать одну под другой так, что, сложив стоящие друг под другом числа, мы получим снова k натуральных чисел, идущих подряд?

87* (7—10). В таблицу 9×9 расставлены числа 1, 2, 3, 4, ..., 81. Доказать, что при любой расстановке найдутся две соседние клетки такие, что разность между числами, стоящими в этих клетках, не меньше 6 (соседними называются клетки, имеющие общую сторону).

88** (7—10). В некотором десятичном числе $a_1a_2a_3 \ldots a_{10}$ первая цифра a_1 равна числу нулей в записи этого числа, вторая цифра a_2 — числу единиц, третья — числу двоек и т. д., последняя a_{10} — числу девяток в записи этого числа. Найти число.

§ 2. Логические задачи

89 (7—8). Несколько команд разыграли первенство по волейболу, сыграв каждая с каждой по одному разу. Доказать, что если какие-нибудь две команды одержали одинаковое число побед, то найдутся такие три команды A, B и C, что A выиграла у B, B у C и C у A (заметим, что при игре в волейбол нет ничьих).

90 (7—8). Предположим, что справедливы следующие утверждения:

а) среди людей, имеющих телевизоры, есть такие, которые не являются малярами, б) люди, каждый день купающиеся в бассейне, но не являющиеся малярами, не имеют телевизоров.

Следует ли отсюда, что справедливо утверждение:

в) не все владельцы телевизоров каждый день купаются в бассейне?

91 (7—10). Каково наибольшее число утверждений из приводимых ниже, которые одновременно могут быть истинными:

а) Джо ловкач,

б) Джо не везет,

в) Джо везет, но он не ловкач,

г) если Джо ловкач, то ему не везет,

д) Джо является ловкачом тогда и только тогда, если ему везет,

е) либо Джо ловкач, либо ему везет, но не то и другое одновременно.

92 (7—10). a и b — целые положительные числа. Известно, что из следующих четырех утверждений:

1) $a+1$ делится на b,

2) a равно $2b+5$,

3) $a+b$ делится на 3,

4) $a+7b$ — простое число,

три верных, а одно неверное. Найдите все возможные пары a, b.

93 (6—8). Найти натуральное число A, если из трех следующих утверждений два верны, а одно — неверно:

1) $A+51$ есть точный квадрат,

2) последняя цифра числа A есть единица,

3) $A-38$ есть точный квадрат.

94 (7—10). Найти все такие двузначные числа A, для каждого из которых два из следующих четырех утверждений верны, а два — неверны:

1) A делится на 5,

2) A делится на 23,

3) $A+7$ есть точный квадрат,

4) $A-10$ есть точный квадрат.

95 (7—10). Найдите, какую цифру обозначает каждая буква в следующем равенстве:

а) $АХ^{А} = БАХ$,

б) $ПИ^{П} = ИЛИ$,

в) $АА^{Н} = АННА$,

г) $КАК = Б^{К}$.

96 (8—10). В пруд пустили 30 щук, которые постепенно поедали друг друга. Щука считается сытой, если она съела трех щук (сытых или голодных). Каково наибольшее число щук, которые могут насытиться?

97 (7—10). Можно ли выложить в цепь, следуя правилам игры, все 28 костей домино так, чтобы а) на одном конце оказалась шестерка, а на другом пятерка? б) на обоих концах была шестерка?

98 (7—10). Можно ли расставить по окружности 20 красных и несколько синих фишек так, чтобы в каждой точке, диаметрально противоположной красной фишке, стояла синяя и никакие две синие фишки не стояли рядом?

99 (6—10). Какое наименьшее количество взвешиваний потребуется, чтобы на весах с двумя чашками без гирь из n монет выделить фальшивую — более легкую?

100 (7—10). Из четырех деталей одна отличается по весу от остальных, имеющих одинаковый вес. Как выделить ее двумя взвешиваниями на весах с двумя чашками без гирь? Можно ли при этом выяснить, легче ли она остальных?

101 (8—10). Среди 12 монет имеется одна фальшивая. Найти ее четырьмя взвешиваниями на весах с двумя чашками без гирь, если неизвестно, легче она или тяжелее остальных.

102 (6—10). Имеются 4 пакета и весы с двумя чашками без гирь. С помощью 5 взвешиваний расположить пакеты по весу.

103* (7—10). На шашечной 16-клеточной доске произвольно расставлены шесть шашек. Доказать, что всегда можно указать два таких горизонтальных и два вертикальных ряда, что все шесть шашек стоят в этих рядах.

104** (9—10). Доказать, что среди любых 6 человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое незнакомых друг с другом. (Задача Рамсея.)

105** (9—10). Собрались n человек. Некоторые из них знакомы, причем каждые двое незнакомых имеют ровно двух общих знакомых, а у двух знакомых нет общих знакомых. Докажите, что каждый из них знаком с одинаковым числом присутствующих.

§ 3. Принцип Дирихле

106 (4—6). В магазин привезли 25 ящиков с яблоками трех сортов, причем в каждом ящике лежали яблоки какого-то одного сорта. Можно ли найти 9 ящиков с яблоками одного сорта?

107 (4—6). В ящике лежат цветные карандаши: 10 красных, 8 синих, 8 зеленых и 4 желтых. В темноте берем из ящика карандаши. Какое наименьшее число карандашей надо взять, чтобы среди них заведомо а) было не меньше 4-х карандашей одного цвета? б) был хотя бы один карандаш каждого цвета? в) было не меньше 6 синих карандашей?

108 (6—8). Доказать, что среди шести любых целых чисел найдутся два, разность которых делится на 5.

109 (7—10). Имеются n целых чисел. Доказать, что среди них найдутся несколько (или, быть может, одно), сумма которых делится на n.

110 (8—10). Доказать, что найдется число вида

$$19711971\ldots 19710\ldots 0,$$

которое делится на 1972.

111 (8—10). Доказать, что для каждого натурального числа n найдется натуральное число, все цифры которого пятерки и нули, которое делится на n.

112 (4—6). Сколько можно взять разных натуральных чисел, не больших 10, чтобы среди них не нашлось двух, одно из которых точно вдвое больше другого?

113 (7—10). Верно ли, что среди любых 30 разных натуральных чисел, не превосходящих 50, всегда можно выбрать два, одно из которых точно вдвое больше другого?

114 (6—7). В классе 40 учеников. Найдется ли такой месяц в году, в котором отмечают свой день рождения не меньше чем 4 ученика этого класса?

115 (6—7). В школе 30 классов и 1000 учащихся. Доказать, что есть класс, в котором не менее 34 учеников.

116 (6—8). В классе 33 ученика, а сумма их возрастов составляет 430 лет. Справедливо ли утверждение, что найдутся в классе 20 учащихся, сумма возрастов которых больше 260?

117 (4—6). Доказать, что из любых трех целых чисел можно найти два, сумма которых делится на 2.

118* (8—10). Доказать, что из совокупности любых $2^{n+1}-1$ целых чисел можно найти 2^n чисел, сумма которых делится на 2^n.

119* (8—10). Даны $n+1$ различных натуральных чисел, меньших $2n$. Доказать, что из них можно выбрать три таких числа, что одно из них равно сумме двух других.

120* (8—10). Доказать, что существует натуральное число, последние четыре цифры которого 1972 и которое делится на 1971.

121 (7—10). Можно ли найти такие две (разные) степени числа 4, у которых а) последняя цифра одинакова? б) две последние цифры одинаковы? в) три последние цифры одинаковы?

122* (8—10). Можно ли найти такую натуральную степень числа 3, которая оканчивается на 0001?

123 (7—10). Шестеро друзей решили в воскресенье побывать в 7 кинотеатрах, сеансы в которых начинаются в 9, 10, 11, ..., 17, 18, 19 часов. На каждый сеанс двое из них шли в один кинотеатр, остальные — в другой. Вечером выяснилось, что каждый из них побывал в этот день во всех семи кинотеатрах. Доказать, что в каждом из семи кинотеатров хотя бы на одном сеансе в этот день не был никто из друзей.

124 (7—10). В розыгрыше кубка по футболу (в один круг) участвует 30 команд. Доказать, что в любой момент найдутся две команды, сыгравшие одинаковое число игр.

125* (8—10). Дано 51 различных однозначных или двузначных чисел. Доказать, что из них можно выбрать 6 таких чисел, что никакие 2 из выбранных не имеют одинаковых цифр ни в одном разряде.

126* (8—10). Доказать теорему: если целые числа m и n взаимно просты, то найдется такое натуральное k, что $m^k - 1$ делится на n.

127** (9—10). В единичный квадрат бросили 51 точку. Доказать, что некоторые три из них обязательно лежат внутри круга радиуса 1/7.

128** (9—10). Сосновый лес растет на участке, имеющем форму квадрата со стороной 1 км. Зная, что весь этот лес состоит из 4500 деревьев диаметра 50 см, доказать, что в лесу можно выбрать прямоугольную площадку 10 м $\times$ 20 м, на которой не растет ни одно дерево.

§ 4. Задачи на делимость и неопределенные уравнения

129 (4—6). Коля и Петя купили одинаковые беговые лыжи. Сколько стоит одна пара лыж, если Петя уплатил стоимость лыж трехрублевыми билетами. Коля — пятирублевыми, а всего они дали в кассу меньше 10 кредитных билетов.

130 (4—6). Сколько имеется четырехзначных чисел, которые делятся на 45, а две средние цифры у них 97?

131 (4—6). К числу 15 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 15.

132 (5—6). Найти последнюю цифру следующих чисел: а) 6^{1971}, б) 9^{1971}, в) 3^{1971}, г) 2^{1971}.

133 (5—6). Найти наименьшее натуральное число, делящееся на 36, в записи которого встречаются все 10 цифр.

134 (6). Доказать, что разность $9^{1972}-7^{1972}$ делится на 10.

135 (6). Какой цифрой оканчивается число

$$9999^{999^{99^{9}}}?$$

136 (4—6). Сколькими нулями оканчивается произведение

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots 98 \cdot 99 \cdot 100?$$

137 (6—7). Доказать, что число

$$\frac{7^{1968^{1970}}-3^{68^{70}}}{10} \text{ — целое.}$$

138 (5—8). Доказать, что из любых 5 целых чисел можно найти 3, сумма которых делится на 3.

139 (6—10). Доказать, что если p — простое число и $p > 3$, то число p^2-1 делится на 24.

140 (6—10). Если x^2+y^2 делится на 3 и x, y целые, то x и y делятся на 3. Доказать.

141 (6—8). Доказать, что сумма квадратов трех целых чисел не может при делении на 8 дать в остатке 7.

142 (5—7). Найти такие четыре натуральных числа, что произведение любых трех из них, сложенное с единицей, делится на четвертое.

143 (6—8). Найти такие четыре разных целых числа, что сумма любых трех из них делится на четвертое.

144 (7—10). Найти n таких разных целых чисел, что произведение любых $n-1$ из них делится на оставшееся число.

145 (6—7). Верна ли теорема: если записать в обратном порядке цифры любого целого числа, то разность исходного и нового числа разделится на 9?

146 (6—8). Найти все такие натуральные числа, которые увеличиваются в 9 раз, если между цифрой единиц и цифрой десятков вставить нуль.

147 (5—7). Пять участников олимпиады стали ее победителями, набрав по 15, 14 и 13 баллов и заняв соответственно первое, второе и третье места. Сколько участников завоевали каждое призовое место, если вместе они набрали 69 баллов?

148 (6—10). Найти наибольший общий делитель чисел $2n+3$ и $n+7$.

149 (6—10). Доказать, что дробь $\frac{12n+1}{30n+2}$ — несократима.

150 (7—10). Найти все целые n, при которых $\frac{19n+7}{7n+11}$ — целое число.

151 (6—7). Можно ли число 1974 представить как разность квадратов двух натуральных чисел?

152 (6—10). Выяснить, при каких натуральных значениях n число n^5-n делится на 120.

153 (6—10). Доказать, что произведение четырех последовательных натуральных чисел, сложенное с единицей, есть точный квадрат.

154 (7—10). Ни одно из чисел $p-1$ и $p+1$, где p — произведение первых n простых чисел $(n>1)$, не является полным квадратом. Доказать.

155 (6—10). Доказать, что если каждое из двух чисел есть сумма квадратов двух целых чисел, то их произведение также есть сумма двух квадратов.

156 (6—10). Может ли сумма квадратов двух нечетных чисел быть квадратом целого числа?

157 (7—10). Доказать, что сумма квадратов пяти последовательных целых чисел не является полным квадратом.

158 (7—10). Некоторое двузначное число кратно трем. Если между его цифрами вставить нуль и к полученному трехзначному числу прибавить удвоенную цифру его сотен, то получится число, в 9 раз большее первоначального. Найти исходное двузначное число.

159* (7—10). Сумма цифр трехзначного числа равна 7. Доказать, что число делится на 7 тогда и только тогда, когда равны его цифры десятков и единиц.

160 (7—10). Доказать, что выражение $x+\frac{1}{x}$ не является целым числом ни при каком рациональном x, отличном от ± 1.

161 (8—10). Может ли квадратное уравнение

$$ax^2+bx+c=0$$

с целыми коэффициентами иметь дискриминант, равный 23?

162 (7—10). Числа p и $2p+1$ простые и $p>3$. Доказать, что число $4p+1$ составное.

163 (7—10). Может ли сумма цифр точного квадрата равняться 1970?

164 (8—10). Если квадрат натурального числа содержит нечетное число десятков, то цифра единиц квадрата всегда равна 6. Доказать.

165. В турнире принимает участие 15 шахматистов. Может ли быть, чтобы в некоторый момент каждый из них сыграл ровно 7 партий?

166 (6—10). Можно ли 1973 телефона соединить между собой так, чтобы каждый был соединен с 1971 телефоном?

167 (9—10). Существует ли многогранник с нечетным числом граней, все грани которого — многоугольники с нечетным числом сторон?

168 (6—10). В школе 953 ученика. Одни из них знакомы, другие не знакомы друг с другом. Доказать, что хотя бы у одного из них число знакомых среди учеников этой школы четно.

169** (8—10). Каждая из 10 цифр 0, 1, 2, 3, ..., 9 написана на двух карточках. Доказать, что эти двадцать карточек нельзя выложить в ряд так, чтобы между двумя карточками с одинаковой цифрой k лежало ровно k карточек (для $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, 9$).

170* (7—10). Улитка ползет из точки A по плоскости, поворачивая на 90° через каждые 15 минут. Докажите, что она может вернуться в точку A только через целое число часов (скорость улитки считается постоянной).

171* (8—10). Даны n чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, каждое из которых равно $+1$ или -1, и

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 0.$$

Доказать, что n делится на 4.

172* (8—10). Найти все такие двузначные числа, что сумма каждого такого числа и числа с теми же цифрами, записанными в обратном порядке, есть полный квадрат.

173 (7—10). Чтобы узнать, является ли число 1601 простым, его стали последовательно делить на 2, 3, 5 и т. д. На каком простом числе можно прекратить испытания?

174 (7—10). Число p простое. Сколько существует чисел, взаимно простых с числом p^3 и меньших его?

175* (8—10). Два двузначных числа, записанных одно за другим, образуют четырехзначное число, которое делится на их произведение. Найти эти числа.

176* (8—10). Из трехзначного числа вычли сумму его цифр. С полученным числом проделали то же самое и так далее, 100 раз. Доказать, что в результате получится нуль.

177* (10). Сколькими способами число 1971 можно представить как сумму нескольких последовательных натуральных чисел?

178* (8—10). Доказать, что общее наименьшее кратное чисел $1, 2, 3, \ldots, 2n$ равно общему наименьшему кратному чисел $n+1, n+2, \ldots, 2n$.

179* (9—10). Доказать, что если s — число всех делителей натурального числа n, то произведение всех делителей равно $\sqrt{n^s}$.

180 (7—10). a и b — взаимно простые натуральные числа. Доказать, что уравнение $ax + by = ab$ не имеет решений в натуральных числах.

181 (8—10). Решить в целых числах уравнение

$$xy = x + y.$$

182 (8—10). Решить в целых числах уравнение

$$6x^2 + 5y^2 = 74.$$

183 (8—10). Решить в целых числах уравнение

$$19x^2 + 28y^2 = 729.$$

184* (8—10). Решить в целых числах уравнение

$$\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} = 3.$$

185* (8—10). Решить в целых числах уравнение

$$1 + x + x^2 + x^3 = 2^y.$$

186* (8—10). Решить в целых числах уравнение

$$1! + 2! + \ldots + x! = y^2.$$

187 (8—10). Решить в натуральных числах уравнение

$$x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z}} = \frac{10}{7}.$$

188* (8—10). Решить в натуральных числах уравнение

$$x + y + z = xyz.$$

189 (8—10). Решить в простых числах уравнение

$$x^y + 1 = z.$$

190 (8—10). Сколько решений в целых числах имеет уравнение

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1960}?$$

191 (8—10). Найти целые решения системы

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ xy - z^2 = 1. \end{cases}$$

192 (7—10). Три купчихи: Олимпиада, Сосипатра и Поликсена пили чай. Если бы Олимпиада выпила на 5 чашек чая больше, то она выпила бы столько, сколько Сосипатра и Поликсена вместе. Если бы Сосипатра выпила на 9 чашек чая больше, то она выпила бы столько, сколько Олимпиада и Поликсена вместе. Их отчества: Титовна, Уваровна и Карповна. Определить, сколько выпила чашек каждая из них и у какой какое отчество, если известно, что Титовна выпила число чашек, кратное трем, а Карповна выпила 11 чашек.

193 (8—10). Три колхозника: Петр, Павел и Андрей и их жены Екатерина, Мария и Валентина отправились в кооператив. Каждый из этих шести лиц купил столько вещей, сколько рублей заплатил за каждую вещь. Петр купил 23 вещами более, чем Мария, а Павел — 11 вещами более, чем Екатерина. Известно, кроме того, что каждый муж издержал на 63 рубля больше, чем его жена.

Определить имя жены каждого колхозника.

АЛГЕБРА

§ 5. Преобразования, функции, уравнения и неравенства

194 (7—8). Разложить на множители:

а) x^8+x^4+1, в) x^8+x+1,
б) x^8+x^7+1, г) x^8+3x^4+4.

195 (7—8). Разложить на множители:

а) $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$,
б) $(a-x)y^3-(a-y)x^3+(x-y)a^3$,
в) $x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)$,
г) $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$.

196 (8). Доказать, что многочлен

$$x^{95}+x^{94}+x^{93}+\ldots+x^2+x+1$$

делится на многочлен

$$x^{31}+x^{30}+\ldots+x^2+x+1.$$

197 (7—8). Доказать, что если $a+b+c=0$, то

а) $a^3+b^3+c^3=3abc$,
б) $a^3+a^2c-abc+b^2c+b^3=0$.

198 (6—7). Доказать, что если $b=a-1$, то
$(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)\ldots(a^{32}+b^{32})=a^{64}-b^{64}$.

199 (7—10). Доказать, что если $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ и $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$, то

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

200 (8). Найти произведение

$$101 \cdot 10001 \cdot 100000001 \cdot \ldots \cdot \underbrace{100\ldots001}_{2^n-1 \text{ нуль}}.$$

201 (8—10). Найти такие a и b, чтобы многочлен $x^4+x^3+2x^2+ax+b$ был полным квадратом.

202 (8—10). Найти сумму

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1970}+\sqrt{1971}}.$$

203 (8—10). Найти сумму

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

204 (8—10). Найти сумму

$$S=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+nx^{n-1}.$$

205 (8—10). Найти сумму

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!.$$

206 (7—10). Доказать

$$\frac{1}{15}<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\ldots\frac{99}{100}<\frac{1}{10}.$$

207 (8—10). Доказать, что при любых действительных a и b, не равных одновременно нулю, уравнение

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{x-1}=1$$

имеет действительные корни.

208 (8—10). a, b, c — различные числа, причем $c\neq 0$. Доказать, что если уравнения $x^2+ax+bc=0$ и $x^2+bx+ca=0$ имеют ровно один общий корень, то другие корни этих уравнений удовлетворяют уравнению $x^2+cx+ab=0$.

209 (9—10). Известно, что $a+b+c<0$ и что уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет действительных корней. Определить знак коэффициента c.

210 (9—10). Даны n положительных чисел a_1, a_2, a_3, ..., a_n, произведение которых равно 1. Доказать, что

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)\geqslant 2^n,$$

211 (8—10). Доказать неравенство

$$\frac{a^2}{4}+b^2+c^2 \geqslant ab-ac+2bc.$$

212 (8—10). Доказать, что

$$x^4+y^4+z^2+1 \geqslant 2x(xy^2-x+z+1).$$

213 (8—10). Доказать, что

$$a^2+b^2+1 \geqslant ab+a+b.$$

214* (8—10). Доказать, что если $abc=1$ и a^3 больше 36, то $\frac{a^2}{3}+b^2+c^2>ab+bc+ca$.

215 (8—10). Доказать, что $x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+xz+yz$.

216 (9—10). Доказать, что если $a^2+b^2 \leqslant 2$, то $a+b \leqslant 2$.

217 (9—10). Если a, b, c — стороны треугольника, то

$$ab+bc+ca \leqslant a^2+b^2+c^2 \leqslant 2(ab+bc+ca).$$

Доказать.

218 (9—10). Доказать

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ \dots\ +\frac{1}{n^2}<1.$$

219 (9—10). Доказать, что для любого натурального $n>1$ справедливы неравенства

$$\frac{n}{2}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ \dots\ +\frac{1}{2^n-1}<n.$$

220 (9—10). Доказать, что если $x+y+z=1$, то $x^2+y^2+z^2 \geqslant 1/3$.

221 (8—10). Найти действительные решения уравнения

$$(x-1)(x-3)(x+5)(x+7)=297.$$

222 (8—10). Решить уравнение

$$\frac{1}{x^2+2x-3}+\frac{18}{x^2+2x+2}=\frac{18}{x^2+2x+1}.$$

223 (8—10). Решить уравнение

$$\frac{3}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{4}{x-2}+\frac{4}{x-3}+\frac{1}{x-4}+\frac{3}{x-5}=0.$$

224 (8—10). Найти действительные решения уравнения

$$(x+2)^4+x^4=82.$$

225 (8—10). Решить уравнение

$$\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}=4-2x-x^2.$$

226 (8—10). Решить уравнение

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1.$$

227 (9—10). Найти целые положительные решения уравнения

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ \ldots\ +\frac{1}{n(n+1)}=\frac{\sqrt{4-n}+4}{\sqrt{4-n}+5}.$$

228 (9—10). Решить уравнение

$$\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}=a.$$

229 (9—10). Решить уравнение

$$\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}=x.$$

230 (9—10). Решить уравнение

$$\sqrt{4-x^2}+\sqrt{1+4x}+\sqrt{x^2+y^2-2y-3}=\sqrt[4]{x^4-16}-y+5.$$

231 (8—10). Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{(x+3)^2}=x+3,\\ \sqrt{(x-3)^2}=3-x.\end{cases}$$

232 (8—10). Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{x+y}{xy}+\dfrac{xy}{x+y}=a+\dfrac{1}{a},\\[2mm] \dfrac{x-y}{xy}+\dfrac{xy}{x-y}=c+\dfrac{1}{c}.\end{cases}$$

233 (9—10). Решить систему уравнений

$$\begin{cases}xy=1,\\ x+y+\cos^2 z=2.\end{cases}$$

234 (8—10). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=a, \\ x+xy+y=b. \end{cases}$$

235 (8—10). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} a(yz-zx-xy)=xyz, \\ b(zx-xy-yz)=xyz, \\ c(xy-yz-zx)=xyz. \end{cases}$$

236 (8—10). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^4+y^4=a, \\ x+y=b. \end{cases}$$

237 (8—10). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x+y)(x+y+z)=72, \\ (y+z)(x+y+z)=120, \\ (z+x)(x+y+z)=96. \end{cases}$$

238 (9—10). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x^2-y^2}=y, \\ x^4-y^4=144. \end{cases}$$

239 (7—10). $P(x)$ — многочлен четвертой степени такой, что $P(1)=P(-1)$ и $P(2)=P(-2)$. Доказать, что $P(x)=P(-x)$ для любого x.

240 (8—9). Найти, при каком целом a многочлен $(x-a)(x-10)+1$ можно разложить в произведение двух многочленов (ненулевой степени) с целыми коэффициентами.

241 (8—10). Найти наименьшее значение функции

$$y=x(x+1)(x+2)(x+3).$$

242 (8—10). Найти наименьшее значение функции

$$y=\frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

243 (9—10). Найти максимум ab, если $a+2b=1$.

244 (8—10). Найти значения a и b, при которых значение многочлена a^3+b^3+ab наименьшее, если $a+b=1$.

245 (7—10). Найти сумму коэффициентов многочлена, получающегося после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении

$$(2-3x+x^2)^{1969}\cdot(2+3x+x^2)^{1970}.$$

246 (9—10). Доказать, что при любом натуральном n

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\left(1+\frac{1}{15}\right)\ldots\left(1+\frac{2}{n^2+2n}\right)<2.$$

247 (9—10). Доказать, что при любом натуральном n

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1+\frac{2}{n^2+3n}\right)<3.$$

§ 6. Математическая индукция и комбинаторика

248 (9—10). Доказать, что (n^3+5n) делится на 6.

249 (9—10). Доказать, что для любого натурального $n \geq 1$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ \ldots\ +\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}.$$

250 (8—10). Указать все денежные суммы в целое число рублей, которые можно уплатить с помощью как четного, так и нечетного числа купюр (в обращении имеются купюры достоинством в 1, 3, 5, 10, 25, 50 и 100 рублей).

251 (8—10). Доказать:

$$1\cdot 2+2\cdot 5+3\cdot 8+\ldots+n(3n-1)=n^2(n+1).$$

252 (9—10). Известно, что $x+\frac{1}{x}$ — целое число. Доказать, что $x^n+\frac{1}{x^n}$ — также целое число при любом целом n.

253 (9—10). Доказать, что при любом натуральном n число $2^{3^n}+1$ делится на 3^{n+1} и не делится на 3^{n+2}.

254 (7—10). Гайка имеет форму правильной шестиугольной призмы. Каждая боковая грань гайки покрашена в один из трех цветов: белый, красный или

синий, причем соседние грани выкрашены в разные цвета. Сколько существует различных по раскраске гаек? (Для раскраски гайки не обязательно использовать все три краски.)

255 (8—10). Сколькими способами можно раскрасить круг, разбитый на p равных секторов с помощью n красок, если p — простое число и каждый сектор раскрашиваем одной краской? Две раскраски, совпадающие при повороте круга, считаем одинаковыми.

256 (9—10). Доказать малую теорему Ферма. Если p — простое число, то при любом натуральном n число $n^p - n$ делится на p.

257 (8—10). Имеется много белых, красных и синих квадратов со стороной 10 см каждый. Сколько из них можно составить различных по раскраске квадратов со стороной 20 см, если каждый большой квадрат составлять из четырех малых?

258* (8—10). Имеются $2m$ одинаковых белых и $3n$ одинаковых черных шаров. Сколькими способами из них можно взять $m+n$ шаров?

259 (7—10). На олимпиаду пришли 10 учащихся из одного класса. Сколькими способами их можно распределить по четырем аудиториям, в которых они будут писать работу?

260 (7—10). Сколько делителей у числа: а) $3^6 \cdot 9^6$? б) $2^4 \cdot 3^5$? в) $2^n \cdot 3^m \cdot 5^k$?

261 (7—10). Сколько существует разных пятизначных чисел, все цифры которых четны?

262 (7—10). Каких чисел больше среди целых чисел первой тысячи, включая и 1000: в записи которых есть хоть одна единица, или среди цифр которых единиц нет?

263 (8—10). Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 составляют всевозможные семизначные числа, в записи которых каждая цифра участвует только один раз. Доказать, что сумма всех этих чисел делится на 9.

264 (9—10). На окружности отмечены 10 точек. Сколько можно провести незамкнутых несамопересекающихся ломаных с вершинами во всех этих точках?

265* (9—10). Даны три положительных числа a, b, c таких, что при любом натуральном k из отрезков длины a^k, b^k, c^k можно составить треугольник. Доказать, что среди чисел a, b, c есть два равных.

§ 7. Разные задачи

266 (8—10). Какое число больше

$$\sqrt{1969}+\sqrt{1971} \quad \text{или} \quad 2\sqrt{1970}?$$

267 (9—10). Какое число больше

$$\sin(\cos x) \quad \text{или} \quad \cos(\sin x)?$$

268 (5—10). Сто разных фишек положены в один ряд. Любые две фишки, стоящие через одну, можно менять местами. Удастся ли переставить фишки в обратном порядке?

269 (9—10). Найти сумму

$$6+66+666+\ldots+\underbrace{666\ldots6}_{n \text{ шестерок}}.$$

270 (9—10). Найти сумму

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n+1}n^2.$$

271 (10). Составлены выражения 1; $3+5$; $7+9+11$; $13+15+17+19$ и т. д. Доказать, что каждое из них — куб некоторого целого числа.

272 (10). Найти сумму всех попарных произведений чисел $1, 2, 3, \ldots, n$.

273* (8—10). Произведение 10 натуральных чисел равно 10^{10}. Какое наибольшее значение может принимать их сумма, если числа не обязательно различны?

274* (7—10). На листе клетчатой бумаги размером 50×50 клеток в каждой клетке написано число. Известно, что в каждых четырех клетках, которые можно покрыть фигурой вида

сумма чисел равна 4. Докажите, что каждое число равно 1.

275* (8—10). В каждой клетке квадратной таблицы 25×25 написано число $+1$ или -1. Обозначим через a_i произведение всех чисел i-й строки, через b_j — произведение всех чисел j-го столбца. Показать, что

$$a_1+b_1+a_2+b_2+\ldots+a_{25}+b_{25}\neq 0.$$

276 (10). Найти арифметическую прогрессию, у которой при любом $n \geqslant 1$ сумма n первых членов равна n^2.

277* (10). Доказать, что среднее арифметическое всех делителей числа n (включая 1 и n) заключено между $\sqrt{n}$ и $\frac{1+n}{2}$.

278 (5—10). Имеются 552 гири весом 1 г, 2 г, 3 г, ..., 552 г. Разложить их на три равные по весу кучки.

279 (6—10). Имеются 555 гирь весом 1 г, 2 г, ..., 555 г. Разложить их на три равные по весу кучки.

280* (8—10). В шахматном турнире каждый шахматист половину своих очков набрал во встрече с участниками, занявшими три последних места. Сколько человек принимало участие в турнире?

281* (8—10). В шахматном турнире участвовало 8 человек и все они набрали разное количество очков. Шахматист, занявший второе место, набрал столько же очков, сколько четыре последних. Как сыграли между собой шахматисты, занявшие третье и седьмое места?

ГЛАВА III

ГЕОМЕТРИЯ

§ 8. Построение и исследование геометрических фигур

282 (6—8). Дан угол и точка M внутри него. Провести прямую через эту точку так, чтобы ее отрезок между сторонами угла делился данной точкой пополам.

283 (6—8). Построить параллелограмм, у которого середины трех сторон лежат в заданных точках.

284 (6—8). Построить квадрат, три вершины которого лежат на трех данных параллельных прямых.

285 (7—8). Построить треугольник по трем медианам.

286 (7—8). Даны точки M, N, K — середины трех равных сторон выпуклого четырехугольника. Построить четырехугольник.

287 (7—10). Дан угол в 19°. Построить циркулем угол в 1°.

288 (7—8). Построить окружность данного радиуса, а) касающуюся двух данных прямых, б) касающуюся данной прямой и данной окружности.

289 (7—8). Вписать окружность в данный угол так, чтобы она проходила через заданную точку A, лежащую на одной стороне угла.

290 (7—10). Точки A и B лежат внутри острого угла. Построить точки L и M на сторонах этого угла так, чтобы длина ломаной $ALMB$ была наименьшей.

291 (7—10). Дан угол AOB и две точки M и N внутри него. Как направить луч света из точки M, чтобы он, отразившись сначала в стороне AO, а затем — в стороне BO, попал в точку N?

292 (7—10). Построить треугольник по серединам двух его сторон и прямой, на которой лежит биссектриса, проведенная к одной из этих сторон.

293 (8—10). Дан круг и точка внутри него. Провести через данную точку хорду заданной длины a.

294 (7—10). Дана окружность, ее диаметр AB и точка C вне окружности. С помощью одной лишь линейки опустить перпендикуляр на прямую AB из точки C.

295 (7—8). Найти множество точек — середины хорд данной окружности, проходящих через данную точку A, лежащую а) на окружности, б) внутри окружности, в) вне окружности, если продолжения хорд проходят через точку A.

296 (7—8). Найти множество точек плоскости, отстоящих от контура квадрата со стороной 2 см на расстоянии 1 см.

297 (7—10). Найти множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до прямых, проходящих через стороны единичного квадрата, равна 4.

298* (8—10). Дана окружность и хорда AB. Найти множество середин ломаных AMB, где M — любая точка окружности.

299* (8—10). Дан равносторонний треугольник ABC. Найти на плоскости множество точек M таких, что треугольники AMB и BMC а) равнобедренные, б) прямоугольные.

300 (7—10). Дан треугольник. Найти множество центров прямоугольников, вписанных в этот треугольник так, что основания прямоугольников лежат на основании треугольника, а две другие вершины — на боковых сторонах.

§ 9. Геометрические задачи на максимум и минимум

301 (6—8). Среди точек данной прямой l найти такую, что сумма расстояний от нее до двух данных точек A, B — наименьшая.

302 (6—8). Из всех треугольников с данным основанием a и данной высотой h, опущенной на нее, найти треугольник минимального периметра.

303 (6—8). Внутри выпуклого четырехугольника найти точку, сумма расстояний от которой до вершин имеет наименьшую длину.

304 (7—8). Через точку, лежащую внутри данного угла, провести прямую, отсекающую от него треугольник наименьшей площади.

305 (7—9). Дан острый угол и точка A внутри него. Построить $\triangle ABC$ минимального периметра, вершины B и C которого лежат на сторонах данного угла.

306 (8—10). Через вершину A треугольника ABC провести прямую l так, чтобы сумма расстояний до нее от вершин B и C была наименьшей.

307 (8—10). Через вершину A треугольника ABC провести прямую l так, чтобы сумма расстояний до нее от вершин B и C была наибольшей.

§ 10. Разные геометрические задачи

308 (7—10). Можно ли разрезать выпуклый семнадцатиугольник на 14 треугольников?

309 (7—10). Доказать, что число треугольников, на которые можно разбить выпуклый n-угольник всеми диагоналями, не пересекающимися внутри n-угольника, а также число диагоналей, участвующих в разбиении, не зависят от способа разбиения.

310 (7—10). В плоскости расположены n одинаковых зубчатых колес так, что первое сцеплено зубцами со вторым, второе — с третьим и так далее, наконец, последнее n-е колесо сцеплено с первым. Могут ли вращаться колеса такой системы?

311 (8—10). В четырехугольнике три тупых угла. Доказать, что из двух его диагоналей большей является та, которая проведена из вершины острого угла.

312 (8—10). Через середину гипотенузы прямоугольного треугольника проведен перпендикуляр. Отрезок этого перпендикуляра, заключенный внутри треугольника, равен 3 см, а вне треугольника (до пересечения с продолжением другого катета) 9 см. Найти длину гипотенузы.

313 (7—10). Доказать, что сумма медиан треугольника больше его полупериметра и меньше его периметра.

314 (7—10). Сколько осей симметрии может иметь семиугольник?

315 (7—9). Длины сторон треугольника — последовательные целые числа, не меньшие 3. Доказать, что высота, опущенная на среднюю по величине сторону, делит ее на отрезки, разность которых равна 4.

316 (8—9). Квадрат со стороной a прямыми, параллельными его сторонами, разбит на n^2 равных квадратов. В каждый из полученных квадратов вписан круг. Доказать, что площадь части исходного квадрата, не покрытой кругами, не зависит от n.

317 (8—10). Доказать, что круги, построенные на сторонах выпуклого четырехугольника, как на диаметрах, покроют весь четырехугольник.

318 (8—10). В трапеции $ABCD$ AD и BC — основания, O — точка пересечения диагоналей. Даны площади $S_1 = S_{\triangle AOD}$ и $S_2 = S_{\triangle BOC}$. Найти площадь трапеции.

319 (7—10). В треугольнике центр вписанной и описанной окружностей совпадают. Доказать, что треугольник равносторонний.

320 (7—10). Доказать, что выпуклый четырехугольник, имеющий ось симметрии, является либо вписанным, либо описанным.

321* (8—10). Пять отрезков таковы, что из любых трех можно составить треугольник. Доказать, что хотя бы один из этих треугольников остроугольный.

322 (7—10). Существует ли треугольник, у которого а) все высоты меньше 1 см, а площадь больше 100 см^2? б) две высоты больше 100 см, а площадь меньше 1 см^2?

323 (8—10). Доказать, что расстояние от любой точки M окружности, описанной около правильного треугольника ABC, до одной из его вершин равно сумме расстояний от точки M до двух других вершин.

324 (7—10). Для каких n существует выпуклый n-угольник, у которого одна сторона имеет длину 1, а длины всех диагоналей — целые числа?

325 (8—10). Площадь треугольника равна S, периметр — P. Прямые, на которых расположены его стороны, отодвигаются (во внешнюю сторону) на расстояние h. Найти площадь и периметр треугольника, образованного тремя полученными прямыми.

326 (7—10). Из точки B квадратного биллиарда пускаем шарик параллельно диагонали. Найти множество таких точек на биллиарде, что если из них пустить одновременно с первым с той же скоростью и в том же направлении второй шарик, то они столкнутся.

327* (7—10). В четырехугольнике $ABCD$ точка E — середина AB, F — середина CD. Доказать, что середины отрезков AF, CE, BF и DE являются вершинами параллелограмма.

328* (7—10). В шестиугольнике $ABCDEF$ стороны AB и DE, BC и EF, CD и FA соответственно параллельны и $AD = BE = CF$. Доказать, что около этого шестиугольника можно описать окружность.

329* (8—10). Доказать, что в круге радиуса 1 нельзя выбрать более пяти точек, попарные расстояния между которыми больше 1.

330 (8—10). n точек на плоскости расположены так, что любой треугольник с вершинами в этих точках имеет площадь не больше 1. Доказать, что все эти точки можно поместить в треугольник площади 4.

331 (9—10). Можно ли составить пирамиду из четырех равных тупоугольных треугольников.

332* (8—10). В прямоугольник размером 20×25 бросают 120 квадратов размером 1×1. Доказать, что при любом расположении квадратов внутри прямоугольника останется свободное место для размещения круга диаметра 1.

333* (9—10). В городе n домов. Какое максимальное число непересекающихся заборов можно построить в этом городе, если каждый забор огораживает хотя бы один дом и никакие два забора не огораживают одну и ту же совокупность домов?

334** (8—10). Дано несколько пересекающихся кругов, занимающих на плоскости площадь, равную единице. Доказать, что из них можно выбрать один или несколько попарно непересекающихся кругов, общая площадь которых не менее 1/9.

ГЛАВА IV

ИЗ ЗАДАЧ ВСЕСОЮЗНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАД ШКОЛЬНИКОВ

335 (8—10). Среди студентов, поступивших в Университет дружбы народов, ровно 50 человек знают английский язык, ровно 50 человек знают французский язык и ровно 50 человек знают испанский язык. Доказать, что студентов можно разбить на 5 (не обязательно равных) групп так, чтобы в каждой группе было ровно 10 человек, знающих английский язык, ровно 10 человек, знающих французский язык, и ровно 10 человек, знающих испанский язык. (Предполагается, что некоторые из студентов могут либо не знать ни один из этих языков, либо знать любое количество из них.) (II, 1968 г.) [1]).

336 (8). В центре поля, имеющего форму квадрата, находится волк, а в вершинах квадрата — 4 собаки. Волк может бегать по всему полю, а собаки только по сторонам квадрата. Известно, что волк задирает собаку, а две собаки задирают волка. Максимальная скорость каждой собаки в 1,5 раза больше максимальной скорости волка. Доказать, что собаки имеют возможность не выпустить волка из квадрата. (III, 1969 г.)

337 (8). Доказать, что если произведение трех положительных чисел равно 1, а сумма этих чисел строго больше суммы их обратных величин, то ровно одно из этих чисел больше 1. (IV, 1970 г.)

338 (8). Цифры некоторого семнадцатизначного числа записываются в обратном порядке. Полученное число складывается с первоначальным. Доказать, что хотя бы одна из цифр их суммы будет четной. (IV, 1970 г.)

---

[1]) Римская цифра означает номер Всесоюзной математической олимпиады.

339 (8). Доказать, что существует стозначное число, делящееся на 2^{100}, в десятичной записи которого участвуют только цифры 1 и 2. (V, 1971 г.)

340 (8). Двое играют в такую игру. Первый записывает один под другим два ряда по 10 чисел так, чтобы выполнялось следующее правило: если число b записано под числом a, а число d под числом c, то $a+d=b+c$. Второй игрок, зная это правило, хочет определить все написанные числа. Ему разрешается задавать первому вопросы типа: «Какое число стоит в первой строке на третьем месте?» или «Какое число стоит во второй строке на девятом месте?» и т. п. За какое наименьшее число таких вопросов второй игрок сможет узнать все числа? (V, 1971 г.)

341 (8). а) Доказать, что прямая, разбивающая данный треугольник на два многоугольника равной площади и равного периметра, проходит через центр окружности, вписанной в треугольник. б) Доказать аналогичное утверждение для произвольного многоугольника, в который можно вписать окружность. (V, 1971 г.)

342 (8). Доказать, что из 25 различных положительных чисел можно выбрать два таких числа, что ни одно из оставшихся не равно ни сумме, ни разности (между большим и меньшим) выбранных чисел. (V, 1971 г.)

343 (8). а) В вершине A_1 правильного двенадцатиугольника $A_1A_2A_3 \ldots A_{12}$ стоит знак минус, а в остальных — плюсы. Разрешается одновременно менять знак на противоположный в любых шести последовательных вершинах многоугольника. Доказать, что за несколько таких операций нельзя добиться того, чтобы в вершине A_2 оказался знак минус, а в остальных вершинах — плюсы. б) Доказать то же утверждение, если разрешается менять знаки не в шести, а в четырех последовательных вершинах многоугольника. в) Доказать то же утверждение, если разрешается одновременно менять знак в трех последовательных вершинах многоугольника. (V, 1971 г.)

344 (9). Пусть a, m, n — натуральные числа, $a>1$. Доказать, что если a^m+1 делится на a^n+1, то m делится на n. (VI, 1972 г.)

345 (9). Треугольная таблица строится по следующему принципу: в верхней строке написано число $a>1$, а далее под каждым числом k слева пишется k^2, а справа число $k+1$. Доказать, что в каждой строке такой таблицы все числа различны. (VI, 1972 г.)

346 (8—9). На прямой даны 50 отрезков. Доказать, что верно хотя бы одно из следующих утверждений: а) некоторые 8 отрезков имеют общую точку, б) найдутся 8 отрезков, никакие два из которых не имеют общей точки. (VI, 1972 г.)

347 (9). Пусть x, y — положительные числа, S — наименьшее из чисел x, $y+\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$. Найти наибольшее возможное значение S. При каких x и y оно достигается? (VI, 1972 г.)

348 (10). На бесконечном клетчатом листе белой бумаги n клеток закрашены в черный цвет. В моменты времени $t=1, 2, \ldots$ происходит одновременное перекрашивание всех клеток листа по следующему правилу: каждая клетка k приобретает тот цвет, который имело в предыдущий момент большинство из трех клеток: самой клетки k и ее соседей справа и сверху. Доказать, что а) через конечное время на листке не останется черных клеток, б) черные клетки исчезнут не позднее, чем в момент времени $t=n$. (VII, 1973 г.)

349 (10). В пространстве заданы 4 точки, не лежащие в одной плоскости. Сколько существует различных параллелепипедов, для которых эти точки служат вершинами? (VII, 1973 г.)

350 (10). Король обошел шахматную доску 8×8, побывав на каждом поле ровно один раз и вернувшись последним ходом на исходное поле. Когда нарисовали его путь, последовательно соединив центры полей, которые он проходил, получилась замкнутая ломаная, без самопересечений. Какую наименьшую и какую наибольшую длину может она иметь, если сторона клетки равна 1? (VII, 1973 г.)

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

351. Доказать, что если некоторый четырехугольник можно разбить на два подобных между собой четырехугольника, то этот четырехугольник — трапеция.

352. Середины сторон AB, BC, CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ лежат в данных точках K, L, M. Где может лежать вершина A?

353. Найти множество центров прямоугольников, образованных четырьмя прямыми, проходящими соответственно через четыре данные точки.

354. Точки A и B движутся по двум пересекающимся прямым с одинаковой постоянной скоростью. Доказать, что на плоскости существует неподвижная точка P, которая в любой момент времени одинаково удалена от точки A и B.

355. Доказать, что площадь квадрата, лежащего внутри треугольника, не превосходит половины площади этого треугольника.

356. Прямоугольник прямыми, параллельными его сторонам, разбит на равные квадраты. Центр каждого квадрата отмечен красным или синим карандашом. Если у двух соседних (т. е. имеющих общую сторону) квадратов центры одного цвета, то эти центры соединяются отрезком того же цвета. Известно, что на каждой горизонтали и на каждой вертикали число красных точек равно числу синих точек. Будет ли в этом случае красных отрезков столько же, сколько синих?

357. Существует ли в сутках момент, когда три стрелки — часовая, минутная и секундная — правильно идущих часов образуют попарно углы в $120°$?

358. За́мок имеет в плане форму равностороннего треугольника со стороной 100 м. Он разделен на

100 треугольных залов. Все стены залов имеют одинаковую длину — 10 м. В середине каждой стены между залами сделана дверь. Доказать, что если человек захочет пройти по замку, побывав в каждом зале не более одного раза, то он сможет осмотреть не более 91 зала.

359. В городе всего 20 улиц: 10 параллельных и 10 других, которые пересекают первые под прямым углом. Какое наименьшее число поворотов может иметь замкнутый маршрут, проходящий через все перекрестки?

360. В квадрате со стороною 1 нарисовано несколько окружностей, сумма длин которых равна 10. Доказать, что можно провести прямую так, что она пересечет не менее четырех окружностей.

361. В окружности диаметра 1 проведено несколько хорд. Докажите, что если каждый диаметр пересекает не более k хорд, то сумма длин всех хорд меньше $3{,}15k$.

362. Решить в целых числах уравнение

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{14}.$$

363. Решить в целых числах уравнение

$$\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}+\frac{yz}{x}=3.$$

364. Найдите a и b такие, что каждый из квадратных трехчленов x^2-ax+b и x^2-bx+a имеет различные целые положительные корни.

365. Функция $f(x)$ определена для всех действительных чисел x, за исключением 0 и 1. Для каждого x выполняется равенство $f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=x$. Найти все такие функции.

366. Найти две последние цифры числа 2^{1000}.

367. Найти 8 простых чисел, сумма квадратов которых на 992 меньше, чем учетверенное произведение.

368. Докажите, что ни одно из чисел $p+1$ и $p-1$, где p — произведение первых n простых чисел, не является полным квадратом.

369. Доказать, что если между цифрами числа 1331 написать по равному количеству нулей, то получится точный куб.

370. Найти число, если для записи его шестой степени в десятичной системе использовались по одному разу цифры 2, 4, 5 и по два раза цифры 8 и 9.

371. Из двух чисел 1 и 2 составлено шесть шестизначных чисел. Доказать, что среди них найдутся два числа, отличающихся не более чем в двух разрядах.

372. Все целые числа произвольным образом разбиты на две группы. Доказать, что хотя бы в одной из групп найдутся три числа, одно из которых есть среднее арифметическое двух других.

373. Можно ли выбрать миллион натуральных чисел так, чтобы никакая сумма нескольких из этих чисел не являлась полным квадратом?

374. Можно ли на окружности расположить числа 0, 1, 2, ..., 9 так, чтобы любые два соседних отличались на 3, 4 или на 5?

375. Можно ли на окружности расположить числа 1, 2, 3, ...,13 так, чтобы любые два соседних отличались на 3, 4 или 5?

376. Доказать, что существуют числа, делящиеся на 5^{1000} и не содержащие в своей записи ни одного нуля.

377. Доказать, что из $(n+1)$ натуральных чисел, меньших $2n$, всегда можно выбрать два, отношение которых есть степень числа 2.

378. Три ученика K, E, H сдают последовательно экзамены. На каждом экзамене сдавший лучше всех получает A очков, второй — B очков, а отвечавший хуже всех — C очков (A, B, C — натуральные). После всех экзаменов K набрал 22 очка, E и H — по 9 очков, причем E был первым по алгебре. Кто был вторым по литературе?

379. На некоторой планете 20 государств, причем среди любых трех некоторые два еще не установили между собой дипломатических отношений (не обменялись посольствами). Доказать, что на этой планете не больше 200 посольств.

380. На конгресс собрались ученые, среди которых есть друзья. Оказалось, что никакие двое ученых, имеющих на конгрессе равное число друзей, не имеют общих друзей. Доказать, что найдется ученый, который имеет ровно одного друга.

381. Решить в действительных числах:

$$\begin{cases} x+y+z=3, \\ x^2+y^2+z^2=3, \\ x^5+y^5+z^5=3. \end{cases}$$

382. Пусть $xy=1$ и $x>y$. Докажите неравенство

$$\frac{x^2+y^2}{x-y} \geqslant 2\sqrt{2}.$$

383. Докажите неравенства:

а) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots-\frac{1}{999}+\frac{1}{1000}<\frac{2}{5}$.

б) $\log_4 5+\log_5 6+\log_6 7+\log_7 8 \geqslant 4{,}4$.

384. Для каких натуральных n неравенство

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n-1}^2+x_n^2 \geqslant (x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})\,x_n$$

справедливо при любых положительных $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$?

385. Пусть $n<(44+\sqrt{1975})^{100}<n+1$, где n — целое. Докажите, что n нечетно.

386. Стрелки часов закреплены, а циферблат можно вращать. Доказать, что можно так повернуть циферблат, что расположение стрелок будет соответствовать некоторому моменту времени. Сколько существует таких положений циферблата?

387. На кружке школьникам предложили две задачи. 17 ребят решили хотя бы одну из них. Только первую задачу решило вдвое больше кружковцев, чем только вторую. Утроенное число ребят, решивших лишь вторую задачу, на 2 больше числа остальных кружковцев.

Сколько кружковцев решили только вторую задачу?

388. В футбольном турнире принимают участие m команд. Каждая команда встречается с каждой по одному разу, при этом выигравшей команде присуждается 2 очка, сыгравшей вничью — 1 очко, проигравшей — 0 очков. Какой максимальный разрыв в очках может быть между командами, занявшими соседние места?

389. Из цифр 1, 2, ..., 9 выбираются 4 цифры и из них составляются два наиболее близких друг к другу

числа. Обозначим через d разность этих чисел. Тогда каждой четверке цифр соответствует некоторая разность d. Какое наибольшее значение может иметь эта разность?

390. Двое пишут $2k$-значное число, употребляя только цифры 1, 2, 3, 4, 5. Первую цифру пишет первый, вторую — второй, третью — первый и т. д. Может ли второй добиться того, чтобы полученное число разделилось на 9, если первый стремится ему помешать?

а) $k=10$;

б) $k=15$.

391. Найти все целые n, для которых $\frac{n+1}{2n-1}$ — целое.

392. Найти все действительные значения a, b, c такие, что выражение ax^2+bx+c принимает целые значения тогда и только тогда, если x — целое.

393. Найдите двузначное число, для которого отношение суммы квадратов цифр к самому этому числу наибольшее.

394. Любому девятизначному числу, в написании которого участвуют только три цифры 1, 2, 3, сопоставляется одна из этих трех цифр, причем известно:

1) числу 111 111 111 сопоставляется цифра 1,

2) числу 222 222 222 сопоставляется цифра 2,

3) числу 333 333 333 сопоставляется цифра 3,

4) числу 122 222 222 сопоставляется цифра 1;

5) если два числа различаются во всех разрядах, то им сопоставляются разные цифры.

Какая цифра сопоставляется числу 123 123 123?

395. Обозначим через $\varepsilon(\alpha)$ сумму цифр числа α. Имеется последовательность всех таких чисел, для каждого из которых $\varepsilon(\alpha)$ делится на 7, т. е. $\alpha_1=7$, $\alpha_2=16$, $\alpha_3=25$ и т. д. Найти $\max(\alpha_{i+1}-\alpha_i)$.

396. По окружности выписаны 1973 цифры. Доказать, что если, начав читать с некоторой цифры по часовой стрелке, получим число, кратное 27, то, начав читать с любой другой цифры по часовой стрелке, также получим число, кратное 27.

397. По окружности произвольным образом расставлены $+1$ и -1 общим числом 2^k. Затем между каждыми двумя соседними числами ставится их произведение, а сами числа стираются. Потом такая же операция проделывается еще раз и т. д.

Доказать, что не более чем через $2k$ таких операций останутся только единицы.

398. Доказать, что для произвольного целого числа A и любого целого p существует бесконечно много таких целых чисел x, что $Ax+1$ делится на $(A+1)^p$.

399. Имеется последовательность $\{a_n\}$, где a_n — последняя цифра числа n^n. Выяснить, не периодична ли она.

400. Сумма 100 натуральных чисел, каждое из которых не больше 100, равна 200. Доказать, что из них можно выбрать несколько чисел, сумма которых равна 100.

401. Подряд выписано 99 девяток. Доказать, что можно приписать к ним справа еще ровно 100 цифр так, что получившееся 199-значное число будет полным квадратом.

402. В таблицу $k \times k$ вписаны попарно неравные натуральные числа. Доказать, что найдутся два числа, стоящих рядом, разность между которыми больше $k/2$.

403. Доказать, что среди 16 последовательных натуральных чисел всегда существует число, взаимно простое с остальными, а среди 17 — не всегда.

404. В треугольнике радиус вписанной окружности равен 1, длины высот — целые числа. Докажите, что треугольник правильный.

405. Указать все значения k, для которых а) квадрат нельзя разбить на k меньших квадратов, б) правильный треугольник нельзя разбить на k меньших правильных треугольников.

406. На шахматной доске размером 8×8 отмечены 64 точки — центры всех клеток. Можно ли отделить каждую из этих точек от любой другой из них, проведя 13 прямых, не проходящих через эти точки?

407. Можно ли четырьмя свинцовыми шарами полностью загородить точечный источник света? (Очевидно, источник находится вне каждого из этих шаров.)

408. В пространстве расположено 20 точек, попарные расстояния между которыми не больше 1. Можно ли утверждать, что найдутся 6 из них, попарные расстояния между которыми не больше 0,99?

409. Доказать, что у любого выпуклого многогранника найдутся две грани с одинаковым числом сторон.

410. Доказать, что в круге радиуса 1 нельзя поместить без наложений два треугольника, площадь каждого из которых больше 1.

411. Доказать, что в произвольном выпуклом $2n$-угольнике найдется диагональ, не параллельная ни одной из сторон.

412. На кубе отмечены вершины и центры граней, а также проведены диагонали всех граней. Можно ли по отрезкам диагоналей обойти все отмеченные точки, побывав в каждой из них ровно по одному разу?

413. Дан равносторонний треугольник ABC и некоторая точка P в плоскости треугольника такая, что $PA = 2$, $PB = 3$. Каковы наименьшее и наибольшее значения PC?

414. Можно ли выбрать внутри квадрата две различные точки так, что если соединить их со всеми вершинами квадрата, то квадрат разобьется на 9 равновеликих частей?

415. а) На прямой расположены 100 точек. Отметим середины всевозможных отрезков с концами в этих точках. Какое наименьшее число отмеченных точек может получиться?

б) На плоскости расположены k точек. Найти наименьшее число середин всевозможных отрезков с концами в этих точках.

416. Учитель танцев хочет расставить по кругу 10 мальчиков и несколько девочек так, чтобы рядом с каждым мальчиком стояли мальчик и девочка и чтобы через одного человека от каждой девочки также стояли бы мальчик и девочка. Сколько девочек он может пригласить?

417. На плоскости лежат n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Сколько можно построить замкнутых (возможно, самопересекающихся) ломаных с вершинами в этих точках?

418. Сколько различных дробей можно получить, расставляя скобки в выражении $x_1 : x_2 : x_3 : \ldots : x_n$?

419. На каждой из 5 карточек написана одна из 5 букв *а*, *б*, *в*, *г*, *д*. Из всех карточек составляют всевозможные слова. Каких слов будет больше: у которых хотя бы одна из этих букв окажется на своем месте, или у которых ни одна буква не будет стоять на своем месте?

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

1. *Ответ.* 3 сестры и 4 брата.

2. Если бы из первой пачки переложили во вторую 2 тетради, то во второй пачке стало бы $30:3=10$ тетрадей, значит, было в ней 8 тетрадей, а в первой пачке 22 тетради.

3. Таня добавила Гале меньше 2 коп. (общих денег не хватило на покупку), значит, она добавила 1 коп., а ей не хватало 7 коп., следовательно, коробка стоит 8 коп.

4. *Ответ.* 10 карандашей.

5. Если взять 20 или меньше ботинок, то они могут оказаться все на одну ногу. Значит, надо брать не меньше 21 ботинка. Если же возьмем 21 ботинок, то среди них обязательно найдутся два ботинка из одной пары (ибо пар лишь 20).

Ответ. 21 ботинок.

6. Сложим кусок пополам и еще раз пополам, получим кусок длиной $\frac{2}{3}:4=\frac{1}{6}$ метра, который и надо отрезать, чтобы остаток равнялся $\frac{1}{2}$ м $\left(\text{так как } \frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\right)$.

7. При счете десятками не хватало 2 огурцов до полного десятка. Значит, оставалось 8 огурцов, как и при счете дюжинами. Поэтому если отложить 8 огурцов, то число оставшихся разделится как на 10, так и на 12, т. е. на 60. Среди чисел больших 300 и меньших 400 лишь 360 делится на 60, значит, огурцов было 368.

8. *Ответ.* 10.

9. Коля съел 4 сливы, значит, увидел он $4\cdot3=12$ слив. Петя съел треть от увиденного им количества слив, значит, оставил $\frac{2}{3}$, поэтому Миша оставил $12:\frac{2}{3}=18$ слив, а мать оставила детям $18:\frac{2}{3}=27$ слив.

10. Каждому покупателю колхозница продавала половину от имеющихся яблок и еще пол-яблока, значит, каждый раз оставалось на одно яблоко меньше, чем она продавала. Итак, шестой покупатель купил 1 яблоко, пятый — 2 яблока, четвертый — 4, третий — 8, второй — 16 и первый 32 яблока, значит, колхозница принесла для продажи 63 яблока.

11. *Ответ.* 37.

12. *Ответ.* 210.

13. Вначале число отсутствующих составляло $^1/_6$ часть от числа присутствующих, значит, присутствующих в 6 раз больше

чем отсутствующих, или отсутствующие составляли $^1/_7$ часть от всего числа учащихся. После выхода одного ученика из класса отсутствующие составили уже $^1/_6$ часть от общего числа учащихся. Итак, один ученик составляет $\frac{1}{6}-\frac{1}{7}=\frac{1}{42}$ часть класса, значит, в классе 42 ученика.

14. *Ответ.* Лодка стоит 600 р., товарищи внесли 200 р., 150 р., 120 р., 130 р.

15. Примем разность за одну часть, тогда сумма составит три части, большее число — 2 части, меньшее — 1 часть. Итак, меньшее число втрое меньше суммы, а сумма — по условию — вдвое меньше произведения, значит, меньшее число в 6 раз меньше произведения, т. е. второй сомножитель равен шести (2 части), откуда первое число (1 часть) равно 3.

Ответ. 3 и 6.

16. Примем меньшее число за одну часть, тогда большее составит 5 частей, откуда 6 частей равно 180. Значит, меньшее число 30, большее 150.

Ответ. 30 и 150.

17. Алгебраическое решение. Если одно из чисел обозначить через a, другое через b, то частное равно $a/2$ и $6b$, т. е. $a/2=6b$, откуда частное равно $a/b=12$ или $b/a=1/12$.

Арифметическое решение. Одно из двух чисел примем за 1 часть, тогда частное равно 6 частям, а второе число (вдвое больше частного) составит 12 частей, поэтому частное либо 12, либо 1/12.

Ответ. 12; $^1/_{12}$ (два ответа).

18. Воскресенья в одном месяце, чередуясь, выпадают на четные и нечетные числа; так как 3 из них выпадали на четное число, то всего в этом месяце было пять воскресений, поэтому первое из них могло быть только второго числа, откуда 20 число — четверг.

Ответ. Четверг.

19. За 60 минут часовая стрелка проходит $^1/_{12}$ круга, а минутная — полный круг, значит, за минуту (после часа) угол между часовой и минутной стрелками сокращается на $\frac{1}{60}-\frac{1}{12\cdot 60}=$ $=\frac{11}{12\cdot 60}$ часть полного круга. В час дня угол между стрелками составляет $^1/_{12}$ часть круга, поэтому совпадут (впервые после часа) они через $\frac{1}{12}:\frac{11}{12\cdot 60}=\frac{60}{11}$ минуты, т. е. в 13 часов 5 минут $27\frac{3}{11}$ секунды.

20. За одну минуту минутная стрелка проходит $^1/_{60}$ часть полной окружности, а часовая $\frac{1}{12\cdot 60}$ часть. Значит, минутная стрелка обгоняет часовую за одну минуту (после 12) на $\frac{1}{60}-$ $-\frac{1}{12\cdot 60}=\frac{11}{720}$ часть окружности, поэтому впервые (после 12) стрелки станут перпендикулярны (т. е. угол между ними будет составлять $^1/_4$ окружности) через $\frac{1}{4}:\frac{11}{720}=\frac{180}{11}=16\frac{4}{11}$ минуты, значит, стрелки впервые после 12 будут перпендикулярны в 12 часов 16 минут $21\frac{9}{11}$ секунд.

21. За 12 часов минутная стрелка делает 12 оборотов, а часовая — 1 оборот, значит, скорость минутной стрелки в 12 раз больше скорости часовой.

а) Если за время между двумя ближайшими моментами совпадений стрелок часовая пройдет $1/a$ часть круга, то минутная стрелка $12/a$ часть круга, которая составит один полный оборот плюс $1/a$. Итак, $\frac{12}{a}=1+\frac{1}{a}$, откуда $a=11$, т. е. за время между двумя совпадениями часовая стрелка пройдет $^1/_{11}$ часть круга. За сутки часовая стрелка делает два полных оборота, и за это время (не считая первого совпадения) произойдет $2:\frac{1}{11}=22$ совпадения, а всего за сутки (считая и первое совпадение в 24 часа) стрелки совпадут $22+1=23$ раза.

б) За время между двумя совпадениями угол между минутной и часовой стрелками сначала увеличивается от нулевого до развернутого, а потом уменьшается от развернутого до нулевого, т. е. только один раз становится развернутым. Совпадений за сутки бывает 23, значит, развернутым угол бывает 22 раза.

в) За время между двумя совпадениями стрелок угол между ними дважды бывает прямым. За сутки стрелки совпадут 23 раза (см. задачу а), значит, будет 22 промежутка между моментами совпадений, следовательно, 44 раза за сутки часовая и минутная стрелки образуют прямой угол.

22.

Бочка	Девятилитровое ведро	Пятилитровый бидон
a	—	—
$a-5$	—	5
$a-5$	5	—
$a-10$	5	5
$a-10$	9	1
$a-1$	—	1
$a-1$	1	—
$a-6$	1	5
$a-6$	6	—

23.

Восьмилитровое ведро	Пятилитровый бидон	Трехлитровый бидон
8	—	—
3	5	—
3	2	3
6	2	—
6	—	2
1	5	2
1	4	3
4	4	—

24.

Двенадцативедерная бочка	Восьмиведерная бочка	Пятиведерная бочка
12	—	—
4	8	—
4	3	5
9	3	—
9	—	3
1	8	3
1	6	5
6	6	—

25.

Бочка	Девятиведерная бочка	Пятиведерная бочка
a	—	—
$a-9$	9	—
$a-9$	4	5
$a-4$	4	—
$a-4$	—	4
$a-13$	9	4
$a-13$	8	5
$a-8$	8	—

26. Если возраст дочери примем за 1 часть, то возраст сына составит 2 части, а возраст отца 3 части. Сын моложе отца на возраст дочери и — по условию — на 20 лет, значит, дочери 20 лет, сыну 40 лет, а отцу 60 лет.

27. Раз Сережа будет втрое старше Вовы, то разность их возрастов будет равна удвоенному возрасту Вовы. Разность возрастов не меняется со временем, значит, она равна $11-1=$ $=10$ лет, т. е. Вове будет 5 лет, а Сереже 15 лет.

28. Разность возрастов отца и сына не меняется со временем. Сейчас она составляет 3 возраста сына, а через 20 лет — один новый возраст сына. Но новый возраст — это старый возраст плюс 20 лет. Итак, три возраста сына есть возраст сына и 20 лет, откуда 20 лет составляет 2 возраста сына.

Ответ. Сыну 10 лет, отцу 40 лет.

29. Легко видеть, что сейчас сыну 10 лет, а отцу 40 лет. Разность их возрастов 30 лет станет удвоенным новым возрастом сына, так что сыну станет 15 лет, значит, это произойдет через 5 лет.

Ответ. Через 5 лет.

30. Обозначим Ваш настоящий возраст через y, а прежний через x. Тогда мне сейчас $2x$ лет, а раньше было y лет. По условию $2x+y=63$. Разность возрастов не меняется со временем, поэтому $2x-y=y-x$, т. е. $3x=2y$ и $\frac{4}{3}y+y=63$, откуда $y=27$, $x=18$.

Ответ. 36 и 27.

31. *Ответ.* Сестре 12 лет, брату 8 лет.

32. *Ответ.* 1 год.

33. Искомое число пассажиров делится на два и, кроме того, 8/100 или 2/25 от этого числа есть число целое. Следовательно, искомое число делится на 2 и на 25, т. е. на 50, а так как оно не превосходит 70, то равно 50.

Ответ 50.

34. В 40 кг морской воды содержится $40 \cdot \frac{5}{100} = 2$ кг соли, что будет составлять 2% от нового количества воды, значит, новый раствор составит $2 : \frac{2}{100} = 100$ кг, поэтому следует добавить $100 - 40 = 60$ кг пресной воды.

Ответ. 60 кг.

35. Если цену картофеля до повышения принять за 100 частей, то после повышения она составила 120 частей, а после снижения на 20% цена уменьшилась на $120 : \frac{20}{100} = 24$ части и стала равна $120 - 24 = 96$ частей, т. е. составит 96% от исходной цены, т. е. после снижения картофель стал стоить на 4% дешевле.

36. Примем шаг высокого за 1 часть, тогда шаг низкого составит $^4/_5$ части; на каждые 100 шагов высокого приходится 120 шагов низкого, поэтому за то время, когда высокий пройдет путь в $100 \cdot 1 = 100$ частей, низкий пройдет путь в $120 \cdot \frac{4}{5} = 96$ частей, т. е. низкий идет медленнее, значит, придет в школу позднее.

37. В 1 тонне свежескошенной травы 60% влаги, т. е. — 600 кг, поэтому сухой массы $1000 - 600 = 400$ кг. Эта масса в сене составит 85%, откуда вес сена составит $400 : \frac{85}{100} = 470\frac{10}{17}$ кг.

38. Примем первоначальную выручку за 1 часть, тогда новая выручка составит $^9/_8$ частей и получена от количества зрителей, составившего $^5/_4$ от исходного количества. Если бы билеты продавали по новой цене прежнему количеству зрителей, то выручили бы $\frac{9}{8} : \frac{5}{4} = \frac{9}{10}$ частей, т. е. выручка составила бы $^9/_{10}$ от первоначальной (при том же числе зрителей), значит, новая стоимость равна $20 \cdot \frac{9}{10} = 18$ коп.

Ответ. 18 коп.

39. *Ответ* 37,5 км/час.

40. Обозначим путь через a км. Тогда второй грузовик на весь путь затратил $\frac{a}{2 \cdot 40} + \frac{a}{2 \cdot 50}$ часов, а первый — x часов, где x находится из уравнения $\frac{x}{2} \cdot 50 + \frac{x}{2} \cdot 40 = a$, откуда $x = a/45$ часов. Так как $\frac{a}{80} + \frac{a}{100} = \frac{9a}{400}$ и $\frac{9a}{400} > \frac{9a}{405} = \frac{a}{45}$, то первый грузовик затратил на путь меньше времени, значит, прибыл в B раньше.

41. 15 секунд поезд движется мимо столба, значит, 15 секунд поезд «съезжает» с моста, т. е. с момента, когда паровоз начал въезжать на мост до момента, когда он начал съезжать с него прошло 30 секунд (45—15). Итак, за 30 секунд паровоз проехал 450 м, откуда скорость паровоза $450 : \frac{1}{2} = 900$ метров

в минуту, или 54 км/час. За 15 секунд (или $^1/_4$ минуты) паровоз пройдет путь, равный длине поезда, значит, длина поезда равна $900 \cdot \frac{1}{4} = 225$ м.

Ответ. 54 км/час; 225 метров.

42. *Ответ.* 35 суток.

43. *Ответ.* 168 км.

44. Нева с одинаковой скоростью несет и пловца и флягу. Поэтому раз пловец 20 минут удаляется от фляги (за счет собственной скорости), то 20 минут он будет догонять ее. Итак, расстояние между мостами, равное 2 км, фляга плывет (со скоростью течения реки) 40 минут, следовательно, скорость Невы $2 : \frac{2}{3} = 3$ км/час.

45. За 10 минут машина проходит путь, равный двойному расстоянию от станции до места встречи инженера с машиной. Значит, путь от станции до места встречи машина проходит за 5 минут. На месте встречи машина была за 5 минут до времени обычного приезда инженера на станцию, значит, путь от станции до места встречи инженер шел 55 мин — 5 мин = 50 мин. Следовательно, скорость инженера в $50 : 5 = 10$ раз меньше скорости машины.

46. Предполагаем, что трамваи идут через равные промежутки и с одинаковой скоростью. Скорость пешехода $\frac{1000}{12}$ м/мин. Пусть x м/мин — скорость трамвая, тогда скорость (относительно пешехода) обгоняющих его трамваев равна $x - \frac{1000}{12}$, а встречных $x + \frac{1000}{12}$. Будем считать каждый трамвай концом «отрезка» длиной y метров, другой конец которого — в следующем трамвае; трамваи мыслить равномерно распределенными (с интервалами y м) на двух лентах, проходящих мимо «неподвижного» пешехода ежедневно в течение 12 минут в двух противоположных направлениях с найденными ранее скоростями. Длина обгоняющей ленты 225 метров, длина встречной ленты 600 метров, время их движения мимо пешехода (за год) $12 \cdot 365$ минут, откуда

$$\begin{cases} 225y = 12 \cdot 365 \left(x - \frac{1000}{12}\right), \\ 600y = 12 \cdot 365 \left(x + \frac{1000}{12}\right), \end{cases}$$

$$\frac{12 \cdot 365}{225}\left(x - \frac{1000}{12}\right) = \frac{12 \cdot 365}{600}\left(x + \frac{1000}{12}\right),$$

$$\frac{x}{3} - \frac{x}{8} = \frac{1000}{12}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{3}\right),$$

$$x = \frac{550}{3} \text{ м/мин} = \frac{550 \cdot 60}{1000 \cdot 3} \text{ км/час} = 11 \text{ км/час}.$$

47. Пусть x км пути проходят по ровному месту; тогда $9-x$ км пути (в гору и под гору) турист проходит дважды, один раз (каждый из участков подъема или спуска) со скоростью 4 км/час, другой со скоростью 6 км/час и затратит на этот путь $\frac{9-x}{4}+\frac{9-x}{6}$ часов. Так как по ровному месту турист идет $\frac{2x}{5}$ часов, а путь в оба конца проходит за 3 часа 41 минуту, то

$$\frac{2x}{5}+\frac{9-x}{4}+\frac{9-x}{6}=3\frac{41}{60},$$

откуда $x=4$ км.

Ответ. 4 км.

48. а) *Ответ.* Это можно сделать многими способами. Например,

$$2+2-2-2=0, \qquad 2\cdot 2+2:2=5,$$
$$(2+2):(2+2)=1, \qquad 2\cdot 2\cdot 2-2=6,$$
$$(2:2)+(2:2)=2, \qquad 2+2+2+2=8,$$
$$(2+2+2):2=3, \qquad 22:2-2=9,$$
$$2\cdot 2+(2-2)=4, \qquad 2\cdot 2\cdot 2+2=10.$$

49. а) $99+\frac{99}{99}$. б) $91+\frac{5742}{638}$.

50. Например, $\frac{97524}{10836}$.

51. *Ответ.* 72.

52. *Ответ.* 28.

53. *Ответ.* а) 9876543210, б) 9876543120.

54. *Ответ.* а) 1023467895, б) 1234567980.

55. *Ответ.* а) $4\cdot 12+18:(6+3)=50$,

б) $(4\cdot 12+18):(6+3)=22/3$,

в) $4\cdot(12+18:6+3)=72$.

56. *Ответ.* $888+88+8+8+8=1000$.

57. *Ответ.* $555+55+55+55+55+55+55+55+55+5$.

58. а) $1:2:3:4:5:6:7:8:9=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}$ — минимальное число. Действительно, частное будет минимальным, если наименьшее количество из заданных чисел окажется в числителе дроби и наибольшим будет знаменатель дроби. В данном случае, не расставляя скобок, получим выражение, в котором число 1 делится на каждое из остальных чисел (последовательно), т. е. на их произведение — это и будет минимальным результатом.

б) $1:(2:3:4:5:6:7:8:9)=1:\frac{2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}=$

$$=3\cdot 2\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9.$$

59. Обозначим искомое число $10a+b$. Тогда $10a+b=7b$, отсюда $10a=6b$ или $5a=3b$; значит, b делится на 5, но b — ненулевая цифра, т. е. $b=5$, тогда $5a=15$, откуда $a=3$, а само число 35.

Ответ. 35.

60. Исходное число: $400+10a+b$. Новое число: $100a+10b+4$. По условию $(400+10a+b)\cdot\frac{3}{4}=100a+10b+4$, откуда $10a+b=32$, а значит, искомое число $400+10a+b=432$.

Ответ. 432.

61. *Ответ.* 18.

62. *Ответ.* 105263157894736842.

63. Указание. Из делимости искомого числа на 72 следует, что сумма его цифр кратна 9 и число, составленное из трех последних цифр, делится на 8.

Ответ. Два решения: 42048; 42840.

64. Пусть a — меньшее, b — большее из искомых трехзначных чисел, т. е. $100\leqslant a<b<1000$ и $a+b=498k$, $b=5a$, или $6a=498k$, $a=83k$, тогда $b=415k$. Из первого получаем, что $k\geqslant 2$, а из второго $k\leqslant 2$, отсюда $k=2$ и $a=166$, $b=830$.

Ответ. 166 и 830.

65. *Ответ.* Наименьшее число

$$11122113\ldots199222\ldots899991;$$

наибольшее число

$$9998899779\ldots911888\ldots211119;$$

их сумма

$$111\ldots1111\ldots1110$$

(число из 162 единиц и одного нуля).

66. Указание. а) Чтобы оставшееся число было наименьшим, надо вычеркнуть 100 бóльших цифр так, чтобы оставшееся число состояло из мéньших цифр и начиналось с наименьших из них.

б) Наибольшее число должно начинаться с наибольшего числа девяток (их может быть не больше пяти), это девятки из первых пяти десятков; шестая цифра должна быть наибольшей из тех, сзади которых остается еще 5 цифр. Такой является лишь цифра 7.

Ответ. а) Наименьшее число: 00000123450. б) Наибольшее число: 99999785960

67. Действительно,

$$\underbrace{111\ldots111}_{81\text{ единица}}=\underbrace{111111111}_{9\text{ единиц}}\cdot10^{72}+\underbrace{11\ldots11}_{9\text{ единиц}}\cdot10^{63}+\ldots$$

$$\ldots+\underbrace{11\ldots11}_{9\text{ единиц}}=111111111\cdot(1000000010\ldots01).$$

Первый сомножитель есть число из 9 единиц, он имеет сумму цифр 9, значит, делится на 9. Второй сомножитель состоит из девяти единиц и нулей, значит, тоже делится на 9. Следовательно, произведение делится на 81.

68. Игрок A заведомо выиграет, если назовет число 89, так как игрок B затем назовет число, не меньшее 90 и не большее 99, поэтому игрок A затем назовет число 100. Отсюда следует, что к выигрышу игрока A ведет такая последовательность чисел: 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, 100, называемых им, независимо от того, какие числа будет называть игрок B.

69. Квадрат числа не может оканчиваться цифрами 2 или 3 или одним нулем. Значит, последняя цифра равна 5, тогда цифра десятков обязательно равна 2, ибо $(10a+5)^2 = 100a^2 + 100a + 25$. Итак, искомый квадрат 3025 $(3025 = 55^2)$.

70. Если, например, каждое из n чисел равно $1/n$, то сумма этих чисел равна 1, а сумма их квадратов равна $1/n$ и при $n > 100$ сумма квадратов будет меньше 0,01.

Ответ. Может.

71. Рассмотрим остаток r от деления любой данной суммы a на 3. Если $r = 0$, то сумму выплачиваем трехкопеечными монетами. Если $r = 1$, то $a \geqslant 10$ и $a = 10 + k$, где k делится на 3, поэтому 10 коп. выплатим двумя пятаками, а оставшуюся сумму — трехкопеечными монетами. Если $r = 2$, то $a - 5$ делится на 3 поэтому a выплатим одним пятаком и трехкопеечными монетами.

72. Указание. 4 способа, когда в размене участвует один или два гривенника; 6 способов размена пятикопеечными монетами или пятикопеечными монетами и монетами низшего достоинства; 3 способа размена с помощью трех- и двухкопеечных монет и 1 способ — только двухкопеечными монетами.

Ответ. 14 способов.

73. В кассу опустили серебряные монеты на сумму 1 рубль, значит, не меньше 5 монет. Каждый получил сдачу мелочью, значит, у них осталось не меньше 20 монет, итак, было у них не меньше 25 монет. Покажем, что возможен набор в 25 монет, удовлетворяющий условиям задачи. Имели до входа в автобус:

5 человек по одной 20-копеечной монете каждый;
10 человек по одной 15-копеечной монете каждый,
5 человек по две 10-копеечные монеты каждый.

Имели после уплаты и взаимных расчетов:

5 человек по одной 15-копеечной монете
10 человек по одной 10-копеечной монете
5 человек по одной 15-копеечной монете.

74. *Ответ.* а) 18, б) 36, в) 45.

75. *Ответ.* а) 11, б) 21, в) 20.

76. Указание. в) В каждой сотне имеются 11 чисел, кратных девяти, но сумму цифр, равную девяти, имеют в первой сотне лишь 10, так как одно из них — 9 не рассматривается в данной задаче, во второй — 9, в третьей — 8 и т. д., наконец, в десятой сотне — одно число (900).

Ответ. а) 10, б) 120, в) 54.

77. Указание. Если повторяющаяся три раза цифра есть нуль, то, добавляя впереди одну из 9 других цифр, получим

9 чисел. Если повторяется в числе цифра $a \neq 0$, то чисел с разными b, $b \neq a$, будет $9 \cdot 4 \cdot 9$. Итак, всего 333 числа.

Ответ. 333 числа.

78. Номера квартир в доме принимают значения от 1 до 100, значит, сумма цифр номера квартиры изменяется от 1 до 18. В каждом десятке номеров сумма цифр различна (ибо у номеров одинакова цифра десятков, а цифра единиц изменяется от 0 до 9), значит, одинаковые суммы цифр могут иметь лишь номера квартир с разными цифрами десятков; поэтому наибольшее количество квартир с одинаковой суммой цифр номера получим, если в каждом десятке квартир найдется одна из таких квартир. В последнем десятке сумма цифр не меньше 9 (так как номера 90, 91 и т. д.), в первом десятке — не больше 9, значит, 9 — это та сумма цифр, которая встречается наибольшее число раз, а именно — 10 раз (в квартирах с номерами 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90).

79. Пусть a, $a+1$, $a+2$, $a+3$ — цифры четырехзначного числа; исходное число $1000a + 100(a+1) + 10(a+2) + (a+3)$; новое число $1000(a+3) + 100(a+2) + 10(a+1) + a$, их разность: $3000 + 100 - 10 - 3 = 3087$.

Ответ. На 3087.

80. *Ответ.* 1941; 470.

81.

$$\text{а) } \overline{\underbrace{33\ldots3}_{n-1\ \text{тройка}}4}^2 = (3\cdot\overline{\underbrace{11\ldots1}_{n\ \text{единиц}}}+1)^2 = \left(\frac{1}{3}\cdot\overline{99\ldots9}+1\right)^2 =$$

$$=\left[\frac{1}{3}(10^n-1)+1\right]^2 = \frac{1}{9}(10^{2n}-2\cdot10^n+1)+\frac{2}{3}(10^n-1)+1=$$

$$=\frac{1}{9}(10^{2n}+4\cdot10^n-5)+1=\frac{1}{9}\Big(\underbrace{\overline{99\ldots9}}_{2n\ \text{девяток}}+4\cdot\underbrace{99\ldots9}_{n\ \text{девяток}}\Big)+1=$$

$$=\underbrace{11\ldots1}_{n\ \text{единиц}}\ \underbrace{55\ldots5}_{n-1\ \text{пятерка}}6.$$

Ответ. а) $\overline{\underbrace{11\ldots1}_{n\ \text{единиц}}\underbrace{55\ldots5}_{n-1\ \text{пятерок}}6} = \overline{\underbrace{33\ldots3}_{n-1\ \text{тройка}}4}^2$,

б) $\overline{\underbrace{44\ldots4}_{n\ \text{четверок}}\underbrace{88\ldots8}_{n-1\ \text{восьмерка}}9} = \overline{\underbrace{66\ldots6}_{n-1\ \text{шестерка}}7}^2$.

82. Действительно,

$$\overline{11\ldots1122\ldots22}=\underbrace{\overline{11\ldots11}}_{100\ \text{цифр}}\cdot10^{100}+$$

$$+2\cdot\underbrace{\overline{11\ldots11}}_{100\ \text{цифр}}=\underbrace{\overline{11\ldots11}}_{100\ \text{цифр}}\cdot(10^{100}+2).$$

В числе $10^{100}+2$ одна единица, одна двойка, остальные — нули, значит, $10^{100}+2$ делится на 3:

$$10^{100}+2=\underbrace{\overline{99\ldots99}}_{100\text{ цифр}}+3=3\cdot(\underbrace{\overline{33\ldots34}}_{100\text{ цифр}}),$$

значит,

$$\overline{11\ldots1122\ldots22}=\underbrace{\overline{11\ldots11}}_{100\text{ цифр}}\cdot3\cdot\underbrace{\overline{33\ldots34}}_{100\text{ цифр}}=\underbrace{\overline{33\ldots33}}_{100\text{ цифр}}\cdot\underbrace{\overline{33\ldots34}}_{100\text{ цифр}}.$$

83. а) $5^{300}=125^{100}<243^{100}=3^{500}$, итак, $5^{300}<3^{500}$.

б) $2^{700}=128^{100}>125^{100}=5^{300}$, итак, $2^{700}>5^{300}$.

в) $3^{200}=9^{100}>8^{100}=2^{300}$, итак, $3^{200}>2^{300}$.

84. Пусть 2^{1971} имеет k цифр, а 5^{1971} имеет m цифр, тогда в искомом числе будет $k+m$ цифр. Так как

$$10^{k-1}<2^{1971}<10^{k},\quad 10^{m-1}<5^{1971}<10^{m},$$

то

$$10^{k+m-2}<10^{1971}<10^{k+m},$$

откуда

$$k+m-1=1971$$

и $k+m=1972$.

Ответ. Всего выписано 1972 цифры.

85. Поместим в одну группу числа, в записи которых четное число единиц, в другую — числа с нечетным числом единиц. Если $\overline{a_1a_2\ldots a_{10}}$ и $\overline{b_1b_2\ldots b_{10}}$ — два числа из одной группы, то, поскольку это разные числа, в некотором разряде у них стоят разные цифры — 1 и 2 (сумма которых дает одну тройку). Но количество единиц в обоих числах имеет одинаковую четность, поэтому не могут совпадать цифры в остальных разрядах, т. е. найдется еще разряд с разными цифрами (сумма которых даст вторую тройку).

Ответ. Можно.

86. Пусть

$$n+1,\ n+2,\ \ldots,\ n+k;\ m+1,\ m+2,\ \ldots,\ m+k —$$

две группы чисел. При сложении получим числа

$$p+1,\ p+2,\ \ldots,\ p+k,$$

сумма которых равна сумме всех чисел заданных двух групп чисел:

$$(p+1)+(p+2)+\ldots+(p+k)=$$
$$=[(n+1)+\ldots+(n+k)]+[(m+1)+\ldots+(m+k)]$$

или

$$\frac{(2p+k+1)k}{2}=\frac{(2n+k+1)k}{2}+\frac{(2m+k+1)k}{2},$$

т. е. $2(p-n-m)=k+1$, итак, $k+1$ четно, значит, k нечетно; следовательно, если задача имеет решение, то лишь при нечетном k. Покажем, что задача имеет решение при любом нечетном k:

первый ряд чисел:

$$n+1,\ n+3, \ldots, n+2q-1; \quad n+2,\ n+4, \ldots, n+2q-2$$

второй ряд чисел:

$$m+q,\ m+q-1, \ldots, m+1;\ m+2q-1, \ldots, m+q+1;$$

ряд сумм:

$$n+m+q+1,\ n+m+q+2, \ldots, n+m+2q;$$
$$n+m+2q+1, \ldots, n+m+3q-1$$

(здесь $k=2q-1$).

87. Рассмотрим две клетки, в которых стоят числа 1 и 81, и соединим их цепочкой из соседних клеток.

1) Если хотя бы одна из этих клеток — не угловая, то цепочка содержит не больше 16 клеток, в которых стоят числа

$$a_1=1,\ \ a_2,\ a_3, \ldots, a_n=81 \quad (n \leqslant 16).$$

Тогда $a_n-a_1=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\ldots+(a_2-a_1)$, или $81-1=(a_n-a_{n-1})+\ldots+(a_2-a_1)$, т. е. $80=(a_n-a_{n-1})+$ $+\ldots+((a_2-a_1)$ (число 80 есть сумма разностей). Разностей (в данном случае) не больше 15, и если бы каждая разность была меньше 6, то их сумма была бы меньше $15 \cdot 5=75$. Итак, среди разностей есть не меньшие 6.

2) Оба числа 1 и 81 стоят в угловых клетках, лежащих на одной диагонали; соединим их двумя цепочками длиной в 17 клеток каждая и составим суммы 16 разностей. Имеем $80=$ $=(81-a_{16})+(a_{16}-a_{15})+\ldots+(a_2-1)$ и $80=(81-b_{16})+$ $+(b_{16}-b_{15})+\ldots+(b_2-1)$; поэтому, если в первой цепочке нет разностей, больших 5, то, поскольку сумма 16 разностей равна 80, каждая разность равна 5, значит, в клетках этой цепочки стоят числа 1, 6, 11, 16, ..., 76, 81, поэтому этих чисел (кроме 1, 81) нет во второй цепочке, т. е. не могут все разности второй цепочки равняться 5, а если какая-то из них меньше 5, то найдется разность, большая 5 (ибо их сумма 80).

88. Число десятизначно, а из условия следует, что сумма его цифр равна числу его знаков: $a_1+a_2+\ldots+a_{10}=10$; кроме того, $a_1 \neq 0$, т. е. $a_1 \geqslant 1$. Обозначим $a_1=k$; по условию, среди цифр числа ровно k нулей, значит, эти нули и цифра k занимают $k+1$ разряд в числе, а сумма этих цифр равна k (на 1 меньше их количества). Поэтому оставшиеся $10-(k+1)=$ $=9-k$ цифр (заведомо не нули) в сумме дают $10-k$, т. е. сумма этих цифр на единицу больше их количества, что возможно лишь, если одна из этих цифр есть 2, а остальные $8-k$ цифр — единицы.

Итак, $a_1=k$, $a_2=8-k$, $a_3=1$, откуда $a_1+a_2+a_3=9$, значит, $a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}=1$, т. е. среди семи последних цифр одна единица, остальные шесть — нули. Итак, среди цифр числа 6 нулей, одна двойка, одна шестерка (количество нулей) и несколько единиц, которых, таким образом, оказалось две, т. е. искомое число 6210001000.

Ответ. 6210001000.

89. Так как в волейболе нет ничьих, то каждая игра для команды заканчивается ее выигрышем или проигрышем. Рассмотрим две команды, имеющие равное число побед. Обозначим через A ту из них, которая выиграла у второй (из двух рассматриваемых команд), а вторую команду — через B. Так как B имеет столько же побед, сколько A, а команде A она проиграла, то найдется команда C, у которой команда B выиграла, но которой A проиграла (иначе у B было бы меньше выигрышей, чем у A). Итак, искомые три команды найдены.

90. По условию а) среди владельцев телевизоров заведомо есть не маляры. По условию б) ни один из них не может ежедневно купаться в бассейне (ибо немаляры, ежедневно купающиеся в бассейне, не имеют телевизоров), значит, утверждение в) справедливо (не все владельцы телевизоров ежедневно купаются в бассейне).

91. *Ответ.* 4 утверждения а), б), г), е).

92. Заметим, что из утверждения 3), что $a+b$ делится на 3, следует $a+7b=(a+b)+6b$ делится на 3, значит, $a+7b$ не простое, т. е. одно из утверждений 3) и 4) — ложно, и, следовательно, утверждения 1) и 2) истинны. Тогда $a=2b+5$, откуда $a+b=2b+5+b=(3b+5)$, т. е. $a+b$ не делится на 3, значит, утверждение 3) ложно и, следовательно, истинны утверждения:

1) $a+1=k\cdot b$, 2) $a=2b+5$, 4) $a+7b$ — простое число,

откуда $2b+6=kb$, т. е. $b(k-2)=6$.

Таким образом, возможные значения $b=1, 2, 3, 6$ и соответственно $a=2b+5=7;\ 9;\ 11;\ 17$. Так как $a+7b$ — простое и больше двух, то $a+7b$ нечетное, значит (так как a — нечетно), b четно, отсюда

$$b=2,\quad a=9;$$
$$b=6,\quad a=17.$$

93. *Ответ.* 1974.

94. Указание. Свойство 4) совместно с любым из трех остальных, а свойства 2) и 3) совместны лишь со свойством 4).

Ответ. $A_1=35$; $A_2=46$; $A_3=74$.

95. *Ответы.* а) $25^2=625$, б) $26^2=676$, в) $11^3=1331$, г) $343=7^3$.

96. Если, например, 7 щук насытятся (съев каждая по 3 голодные щуки), то останутся еще 2 голодные, которые насытятся (съев каждая по 3 ранее насытившиеся щуки); итак, общее количество насытившихся щук равно 9. Покажем, что 9 — наибольшее количество насытившихся щук.

Пусть k — число оставшихся щук, n — число насытившихся, тогда $3n$ — число проглоченных щук, поэтому (если каждая щука или насытится, или не съест ни одной щуки) $k+3n=30$, значит, $k=3m$ и $m+n=10$. Так как заведомо останутся несъеденные щуки, то $m\geqslant 1$, значит, наибольшее значение $n=9$.

Ответ. 9 щук.

97. Если на одном конце цепи, в которой лежат все 28 костей домино, шестерка, то и на другом конце — тоже шестерка. В самом деле, всего костей с «шестеркой» имеется 7, если дубль

лежит в середине цепи, то к нему примыкают еще две кости с «шестеркой», остальные «шестерки», не лежащие с краю, встречаются обязательно парами, так что с краю находятся либо две шестерки, либо ни одной.

Если же шестерка дубль лежит на конце цепи, то перед ней тоже шестерка, а из остальных 5 костей с шестерками те, что лежат не с краю цепи, встречаются лишь парами, значит, заведомо остается одна кость с «шестеркой», лежащая на другом конце цепи, итак, в этом случае на обоих концах — «шестерки».

Ответ. а) нельзя, б) можно.

98. По условию красные и синие фишки должны чередоваться (на окружности), значит, всего их 40. На полуокружности между красной и противоположной ей синей фишкой стоят 19 фишек, значит, крайние из этих 19 фишек — одноцветны, а они должны быть разноцветными, как соседние — одна — с красной, другая — с синей. Следовательно, указанная в задаче расстановка фишек не возможна.

99. *Ответ.* Если $3^k < n \leqslant 3^{k+1}$, то нужно $k+1$ взвешивание.

100. Положим на чашки по одной монете. Если весы останутся в равновесии, то на чашках лежали хорошие монеты. Заменим одну из этих монет одной из оставшихся, произведем второе взвешивание. Если весы останутся в равновесии, то фальшивая монета — четвертая (оставшаяся; только в этом случае мы не будем знать, легче ли она остальных или тяжелее). Если же опустится одна из чашек, то фальшивая — та монета, которую положили на чашку при втором взвешивании. Если при первом взвешивании весы не будут в равновесии, то хорошими будут две оставшиеся; при втором взвешивании заменим одну из ранее взвешивавшихся монет одной из хороших оставшихся.

101. При первом взвешивании положим на чашки по 4 монеты. Если весы будут в равновесии, то двумя взвешиваниями из 4-х оставшихся монет выделим фальшивую (см. задачу 100). Если же одна из чашек опустится, то обозначим монеты буквой «л» или «т» в зависимости от того, на «более легкой» или «более тяжелой» чашке они лежат. Вторым взвешиванием сравним вес «легкой» четверки монет с оставшейся четверкой. Если весы останутся в равновесии, то фальшивая монета среди четырех «тяжелых» и ее выделим оставшимися двумя взвешиваниями (см. задачу 100). Если при втором взвешивании одна чашка опустится, то, значит, фальшивая монета — одна из четырех «легких».

102. С помощью трех взвешиваний расположим по весу три пакета (взвешивая каждую пару), потом положим на одну чашку весов оставшийся (четвертый) пакет, а на другую тот из трех, который имеет средний вес. Пятым взвешиванием сравним вес четвертого пакета либо с самым тяжелым, либо с самым легким из трех.

103. Указание. Возможны случаи: а) в одном из рядов стоит не меньше трех шашек, б) есть два ряда, в каждом из которых по две шашки. Тогда в случае а) возьмем ряд с наибольшим числом шашек (три или более), а оставшиеся (2 или 3 шашки) заведомо лежат не более чем в 3-х рядах; в случае б) укажем два ряда, в каждом из которых по 2 шашки, а для оставшихся двух шашек — укажем для каждой из них свой ряд.

104. Пусть A — один из шести человек. Тогда среди остальных пяти найдутся либо трое с ним знакомых, либо — трое с ним незнакомых. Пусть, например, B, C, D знакомы с A. Если среди них найдутся двое знакомых друг с другом, то вместе с A они образуют тройку попарно знакомых. Если же все трое незнакомы друг с другом, то они дадут искомую тройку попарно незнакомых людей. Аналогично разбирается случай, когда B, C, D не знакомы с A.

105. Заметим, что знакомые A не знакомы между собой (иначе они имели бы A своим общим знакомым). Пусть A и B знакомы и B, A_1, ..., A_i, ..., A_n — совокупность всех знакомых A. Тогда каждый из A_i не знаком с B, поэтому у A_i и B есть ровно два общих знакомых, один из них — это A, другой — какой-то B_i — один из знакомых B. Таким образом, каждому A_i сопоставляется некоторый B_i. Если $i \neq j$, т. е. A_i, A_j — разные люди, то различны и их знакомые B_i и B_j (иначе у A и B_i были бы три общих знакомых: B, A_i, A_j). По соображениям симметрии ясно, что разным B_i и B_j также соответствуют разные A_i и A_j, значит, соответствие между знакомыми A и B взаимно однозначно, поэтому число знакомых у A и B одинаково.

Если D — любой из присутствующих, то либо он знаком с A и тогда (по доказанному) у A и D одинаковое число знакомых. Либо он не знаком с A, тогда имеется у них общий знакомый C; у него столько же знакомых, как у A, и столько же, как у D, т. е. у A и D одинаковое число знакомых. Итак, у любого из присутствующих столько же знакомых, как у A, значит, каждый знаком с одинаковым числом присутствующих.

106. Так как сортов имеется 3, а ящиков 25, то хотя бы одного сорта имеем не меньше 9 ящиков.

Ответ. Можно.

107. *Ответы.* а) 13. б) 27. в) 28.

108. При делении на 5 возможных 5 разных остатков: 0; 1; 2; 3; 4. Так как чисел 6, то найдутся 2 числа с одинаковыми остатками; их разность разделится на 5.

109. Пусть a_1. a_2, a_3, ..., a_n — данные числа. Составим n сумм:

$$\begin{aligned} &a_1, \\ &a_1 + a_2, \\ &a_1 + a_2 + a_3, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n. \end{aligned}$$

Либо одна из этих сумм делится на n (значит, является искомой), либо ни одна не делится на n, тогда найдутся две суммы с одинаковым остатком (так как сумм n, а ненулевых остатков только $n-1$). Разность этих сумм

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1} + \ldots + a_m) - \\ - (a_1 + a_2 + \ldots + a_k) = a_{k+1} + \ldots + a_m$$

— тоже сумма и делится на n.

110. Запишем 1972 числа

$$1971,\ 19711971,\ \ldots,\ \underbrace{1971\ \ldots\ 1971}_{\text{число 1971, повторенное 1972 раза}}$$

и рассмотрим остатки от деления каждого из этих чисел на 1972. Очевидно, ни одно из записанных чисел не делится на 1972 (ибо 1972 четно, а числа — нечетные), значит, имеет ненулевой остаток. Так как чисел больше, чем ненулевых остатков (чисел 1972, а остатков 1971), то найдутся два из записанных чисел с одинаковым остатком, разность их делится на 1972 и имеет требуемый вид.

111. Доказательство аналогично доказательству предыдущей задачи: надо рассмотреть n чисел вида 50, 5050 и т. д.

112. *Ответ.* Не больше 6 чисел.

113. *Ответ.* Неверно. Можно найти даже 33 числа, ни одно из которых не является удвоенным другим числом, хотя все они не превосходят 50.

114. Так как $40 > 36 = 12 \cdot 3$, то найдется месяц, в котором родились не менее четырех одноклассников.

115. Если бы в каждом классе было меньше, чем по 34 ученика, то в 30 классах школы училось бы не более $33 \cdot 30 = 990$ учащихся, а не 1000.

116. Если бы сумма возрастов 20 старших учащихся класса была не больше 260, то среди них были бы ученики в возрасте не больше 13 лет, значит, каждый из 13 младших школьников не старше 13 лет, откуда сумма их возрастов не превышает $13 \cdot 13 = 169$ лет, но тогда сумма возрастов всех одноклассников не превышала бы $260 + 169 = 429$ лет, что противоречит условию задачи. Итак, от противного доказано, что сумма возрастов 20 старших школьников больше 260.

117. Среди трех целых чисел обязательно найдутся два числа одинаковой четности (так как чисел 3, а классов — четных и нечетных чисел — лишь два). Сумма их, очевидно, делится на 2.

118. Доказательство аналогично доказательству задачи **117**, но следует провести его методом математической индукции.

119. Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1}$ — данные числа. Рассмотрим n разностей: $a_2 - a_1$; $a_3 - a_1$; $\ldots$; $a_{n+1} - a_1$; они положительны, различны и меньше $2n$. Таким образом, у нас теперь $(2n+1)$ натуральных чисел ($a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ и разности $a_2 - a_1, \ldots$ $\ldots, a_{n+1} - a_1$), каждое из которых меньше $2n$. Поэтому среди чисел есть равные; но так как различны исходные числа и различны их разности, то некоторое число a_k совпадает с одной из разностей $a_k = a_m - a_1$, откуда $a_1 + a_k = a_m$, что и требовалось доказать.

120. Рассмотрим 1971 число вида: 1972, 19721972 и т. д., последнее из чисел состоит из 1971 группы из четырех цифр 1, 9, 7, 2. Либо одно из этих чисел делится на 1971 и, таким образом, является искомым, либо найдутся два числа с одинаковым остатком при делении на 1971. Тогда их разность имеет вид $197219721972\ldots1972 \cdot 10^{4m}$ и делится на 1971. Так как 10^{4m} и 1971 взаимно просты, то на 1971 делится первый множитель, т. е. число $1972\ldots1972$, что и требовалось доказать.

121. Указание. Доказать существование двух разных степеней числа 4, которые дают одинаковые остатки при делении на 10, 100 или 1000.

Ответ. Можно.

122. Рассмотрим 10^4 разных степеней числа 3: $3, 3^2, 3^3, \ldots$ $\ldots, 3^{10^4}$ и остатки при делении каждой степени на 10^4. Каждое из чисел дает ненулевой остаток при делении на 10^4; разных ненулевых остатков $10^4 - 1$, а чисел 10^4, значит, найдутся две разные степени 3^m и 3^n с одинаковым остатком. Их разность $3^m - 3^n$ делится на 10^4, т. е. $3^m - 3^n = 10^4 l$ или $3^n(3^{m-n} - 1) = 10^4 l$. Так как 3^n и 10^4 взаимно просты, а произведение $3^n(3^{m-n} - 1)$ делится на 10^4, то $(3^{m-n} - 1)$ делится на 10^4 или $3^{m-n} - 1 = 10^4 \cdot k$, откуда $3^{m-n} = 10^4 \cdot k + 1$, что и требовалось доказать.

Ответ. Можно.

123. Всего шестеро друзей смогут посетить 22 киносеанса. Если хотя бы в одном кинотеатре они побывали на всех сеансах (т. е. на 11), то в остальных 6 кинотеатрах посетили тоже 11 сеансов, значит, хотя бы в одном кинотеатре побывали только на одном сеансе, следовательно, кто-то из них в этом кинотеатре не был

124. Возможны два случая. Первый случай — хотя бы одна из команд не сыграла еще ни одной игры. Тогда количество игр у любой команды не больше 28, т. е. возможное число игр у любой команды принимает одно из 29 значений: $0, 1, 2, \ldots, 28$. Разбив 30 команд на 29 классов по числу сыгранных игр, мы заведомо найдем класс, в котором не меньше двух команд. Второй случай — каждая команда сыграла хотя бы одну игру; количество игр принимает одно из 29 значений: $1, 2, 3, \ldots, 29$. Итак, опять число команд больше числа игр, поэтому найдутся две команды, сыгравшие одинаковое количество игр.

125. Так как чисел 51, то найдутся такие 6 десятков, что в один из них попадет группа не менее чем из 6 чисел, в другой — не менее чем из 5 и т. д., наконец, в какой-то десяток попадет хотя бы одно из заданных чисел. (Таким образом, всего различных десятков не менее 6.) Цифры единиц у чисел одной группы (одного десятка) различны; поэтому, взяв число из последней группы, затем — из предпоследней (с другой цифрой единиц) и т. д., получим искомые 6 чисел с разными цифрами.

126. Среди $n+1$ чисел $m, m^2, \ldots, m^{n+1}$ найдутся два, имеющих одинаковый остаток при делении на n, тогда их разность делится на n. Пусть, например, $m^l - m^t = a \cdot n$ или $m^t(m^{l-t} - 1) = a \cdot n$. Так как $(m, n) = 1$, то $(m^t, n) = 1$, значит, $m^{l-t} - 1$ делится на n, т. е. $m^{l-t} - 1$ и есть искомое число.

127. Разобьем квадрат на 25 равных квадратиков со стороной 1/5. Тогда найдется один из этих квадратиков, в который попадает не меньше трех точек (ибо $51 > 2 \cdot 25$). Круг, описанный около этого квадратика, содержит не менее трех точек и имеет радиус $r = \sqrt{2}/10 = \sqrt{1/50} < \sqrt{1/49} = 1/7$.

128. Разобьем участок на прямоугольники размером 10 м $\times$ $\times$ 20 м и на полосы между ними, а именно: на одной стороне участка отложим 48 отрезков длиной в 20 м каждый, причем

между соседними отрезками оставим промежуток в 0,6 м, и два крайних отрезка по 5,9 м каждый. На второй стороне квадрата отложим 95 отрезков длины 10 м каждый, разделенных промежутками длины, большей 0,5 м каждый. Тогда на участке окажется $48 \cdot 95 = 4560$ прямоугольников, разделенных полосами, шириной, большей 0,5. Так как деревьев всего 4500 и ни одно из деревьев не может попасть больше, чем в один прямоугольник, то найдутся прямоугольники (даже не меньше 60), на которых нет деревьев.

129. Стоимость лыж делится на 3 и на 5, значит, на 15. Каждые 15 рублей Петя уплатил пятью, а Коля — тремя билетами, значит, количество кредитных билетов, которые оба дали в кассу, кратно 8, а так как оно меньше 10, то оно равно 8, значит, лыжи стоят 15 рублей.

130. *Ответ.* 2970 и 6975.

131. *Ответ.* 1155; 3150; 4155; 6150; 7155; 9150.

132. *Ответ.* а) 6, б) 9, в) 7, г) 8.

133. *Ответ.* 1023457896.

134. Указание. Показать, что последние цифры степеней равны.

135. *Ответ.* 9, ибо 9 в нечетной степени оканчивается на 9.

136. Среди сомножителей числа $A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 100$ на 5 делятся $100 : 5 = 20$, из них на 25 делятся $20 : 5 = 4$ числа, значит, A делится на 5^{24}. Среди множителей A имеется 50 четных, поэтому A заведомо делится на 2^{24}, откуда A делится и на $5^{24} \cdot 2^{24} = 10^{24}$, значит, произведение оканчивается 24 нулями.

137. Последняя цифра числа 7^n зависит от показателя степени n и принимает значения: 7, 9, 3, 1, причем, если показатель степени n делится на 4, то последняя цифра числа 7^n есть единица. Число 3^n оканчивается на одну из цифр 3, 9, 7, 1, причем, если n делится на 4, то последняя цифра равна 1. Так как 68 делится на 4, то 1968 делится на 4, откуда 1968^{1970} делится на 4 и 68^{70} делится на 4. Значит, заданное число — целое (ибо в числителе дроби уменьшаемое и вычитаемое оканчиваются той же цифрой 1, поэтому числитель делится на 10).

138. Возможны два случая.

I. Среди 5 данных целых чисел найдутся 3 с одинаковыми остатками при делении на 3. Их сумма, очевидно, делится на 3.

II. Нет трех чисел с одинаковыми остатками, значит, 5 чисел попадают во все три класса остатков, поэтому есть три числа с остатками 0, 1 и 2, эти числа и являются искомыми.

139. Очевидно, $(p-1)p(p+1)$ делится на 3, но p простое и $p > 3$, значит, p не делится на 3, т. е. $(p-1) \cdot (p+1)$ делится на 3. Кроме того, p нечетно (как простое, большее двух), значит четны $p-1$ и $p+1$, поэтому одно из них заведомо делится на 2, другое — на 4, т. е. $(p-1)(p+1)$ делится на 8.

140. Пусть $x = 3a + r_1$ и $y = 3b + r_2$, где r_1, r_2 — остатки от деления на 3, т. е. какие-то из чисел 0, +1, −1. Тогда $x^2 + y^2 = 3(3a^2 + 3b^2 + 2ar_1 + 2br_2) + r_1^2 + r_2^2$. Так как $x^2 + y^2$ делится на 3, то $r_1^2 + r_2^2$ делится на 3, т. е. $r_1^2 + r_2^2 = 0$, откуда $r_1 = r_2 = 0$.

141. Любое целое число при делении на 8 имеет остатком одно из следующих восьми чисел 0, $+1$, ± 2, ± 3, 4, поэтому квадрат целого числа имеет остатком при делении на 8 одно из трех чисел 0, 1, 4. Чтобы при делении на 8 сумма квадратов трех чисел имела остаток 7, необходимо, чтобы этот остаток был нечетным, а это возможно лишь в двух случаях: либо один из квадратов, либо все три при делении на 8 имеют нечетные остатки. В первом случае нечетный остаток есть 1, а сумма двух четных остатков равна 0, 2, 4, т. е. сумма всех остатков равна 1, 3, 5, т. е. остатка 7 в этом случае получить нельзя. Во втором случае остаток всей суммы равен 3. Итак, 7 не может быть остатком при делении на 8 суммы квадратов трех целых чисел.

142. *Ответ.* Например, 1, 2, 3, 7.

143. *Ответ.* Например, $-1, 1, -2, 2$.

144. *Ответ.* Например, $2, 2^2, \ldots, 2^n$.

145. *Ответ.* Теорема верна.

146. Пусть исходное число $10N + b$, где b — цифра единиц. Тогда по условию девятикратное число равно $100N + b$. Итак, $9(10N + b) = 100N + b$, откуда $10N = 8b$ или $5N = 4b$, т. е. b делится на 5, но b — цифра, значит, $b = 0$ или $b = 5$.

Если бы $b = 0$, то $N = 0$ и число было бы нулем, т. е. число $10N + b$ не натурально; значит, $b = 5$, откуда $5 \cdot N = 4 \cdot 5$ и $N = 4$. Итак, единственное искомое число 45.

147. Три участника заняли три первых места, значит, набрали 42 балла. Поэтому два других участника набрали $69 - 42 = 27$ баллов, т. е. один из них набрал 14, а другой 13 баллов, и таким образом, заняли второе и третье места.

148. Н. о. д. двух чисел совпадает с н. о. д. одного из них и их разности: н. о. д. чисел $2n + 3$ и $n + 7$ равен н. о. д. чисел $n + 7$ и $n - 4$, равен н. о. д. чисел 11 и $n - 4$. Но 11 — простое число, значит, искомый н. о. д. равен 1 либо 11. Если $n - 4 = 11 \cdot k$, т. е. $n = 11k + 4$, то н. о. д. равен 11. Если же $n \neq 11k + 4$, то н. о. д. равен 1.

149. Решение аналогично задаче 148. У к а з а н и е. Заменяем н. о. д. данных чисел равным ему н. о. д. чисел $12n + 1$ и $6n$, но эти числа — взаимно просты.

150. У к а з а н и е. Выделить из дроби целую часть 3 и найти целые n, при которых дробь $\dfrac{2n + 16}{7n + 11}$ будет по модулю меньше 1, т. е. не будет целым числом. Такими значениями будут $n < -3$ и $n > 1$. Затем проверить дробь при $n = -3; -2; -1; 0; 1$.

Ответ. $n = -3; -2; 1$.

151. У к а з а н и е. 1974 делится на 2, но не делится на 4, в то время как если разность $a^2 - b^2$ четна, то четны и $a - b$ и $a + b$, следовательно, $a^2 - b^2$ делится на 4.

Ответ. Нельзя.

152. *Ответ.* $n = 8k$ или $n = 2k - 1$.

153. Действительно,

$$(n - 1)n(n + 1)(n + 2) + 1 = (n^3 - n)(n + 2) + 1 = \\ = n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n + 1 = (n^2 + n - 1)^2.$$

154. Очевидно, p четно, но p не делится на 4.

I. Если бы $p+1=b^2$, то $p=b^2-1=(b-1)(b+1)$; p четно, значит, $p+1=b^2$ нечетно, т. е. b нечетно, откуда $b-1$ и $b+1$ четны и $b^2-1=p$ делится на 4.

II. Если бы $p-1=b^2$, то, так как p делится на 3, имеем $p-1=3k+2$ или $b^2=3k+2$, что невозможно.

155. Если $x=a^2+b^2$, $y=c^2+d^2$, то

$$xy=(a^2+b^2)(c^2+d^2)=a^2c^2+b^2c^2+a^2d^2+b^2d^2=$$
$$=(ac+bd)^2+(bc-ad)^2.$$

156. Пусть $a=2n+1$, $b=2m+1$. Тогда $a^2+b^2=$ $=4(n^2+m^2+n+m)+2$. Значит, a^2+b^2 делится на 2 и не делится на 4, т. е. a^2+b^2 — число четное, но на 4 не делится. Если бы a^2+b^2 было квадратом целого числа, то оно было бы квадратом четного числа (ибо само — четно) и делилось бы на 4, что не выполнено. Следовательно, сумма квадратов двух нечетных чисел быть квадратом целого числа не может.

157. Действительно,

$$(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=$$
$$=5n^2+10=5(n^2+2).$$

Итак, сумма делится на 5, поэтому, если бы она была квадратом, то делилась бы на 25, т. е. (n^2+2) делилась бы на 5, что невозможно, ибо квадрат числа при делении на 5 имеет остаток 0, 1, 4, откуда остаток n^2+2 равен 2, 3 или 1, т. е. n^2+2 не делится на 5, следовательно, сумма квадратов пяти последовательных целых чисел не есть квадрат.

158. Число $10a+b$ делится на 3, значит, $a+b$ делится на 3. Число $100a+b$ имеет ту же сумму цифр, поэтому тоже делится на 3. Новое число $100a+b+2a=102a+b$ по условию делится на 9, значит, и на 3, но 102 делится на 3, поэтому b делится на 3, а так как $a+b$ делится на 3, то a делится на 3. По условию $102a+b=9(10a+b)$ или $3a=2b$, откуда a делится на 2, но a делится и на 3, следовательно, a делится на 6; так как a однозначно и не нуль, то $a=6$, откуда $2b=18$ и $b=9$.

Ответ. 69.

159. Пусть $N=100x+10y+z$, где $x\geqslant 1$ и $x+y+z=7$, откуда $x=7-y-z$. Тогда

$$N=700-100y-100z+10y+z=700-90y-99z=$$
$$=(700-91y-98z)+(y-z)=7A+(y-z).$$

N делится на 7 тогда и только тогда, когда $(y-z)$ делится на 7. Так как y, z — цифры десятков и единиц трехзначного числа, то $0\leqslant y+z<x+y+z=7$ (ибо x — цифра сотен — не меньше 1). Значит, $y+z\leqslant 6$. Так как $0\leqslant z\leqslant 6$ и $0\leqslant$ $\leqslant y\leqslant 6$, то $-6\leqslant z-y\leqslant 6$, поэтому $(z-y)$ делится на 7 тогда и только тогда, когда $z-y=0$ или $y=z$, что и т. д.

160. Запишем x как несократимую дробь $x=\frac{p}{q}$. Если $\frac{p}{q}+\frac{q}{p}=n$, где n — целое, то $p^2+q^2=npq$, откуда следует, что p^2 делится на q, но $(p, q)=1$, следовательно, $q=\pm 1$; аналогично покажем, что $p=\pm 1$, откуда $x=\pm 1$.

161. Если бы $b^2-4ac=23$, то $b^2-25=4ac-2$ или $(b-5)(b+5)=2(2ac-1)$. Но $b-5$ и $b+5$ — числа одинаковой четности, поэтому их произведение, если оно четно, делится на 4; правая же часть есть четное число, не делящееся на 4.

162. Число p — простое и $p>3$, значит, $p=3k\pm 1$, тогда $2p+1=6k\pm 2+1$, но $2p+1$ — простое и $2p+1>6$, откуда $(2p+1)$ не делится на 3, поэтому $2p+1\neq 6k+3$, т. е. $p\neq \neq 3k+1$, значит, $p=3k-1$; следовательно, $4p+1=12k-\\-4+1=3(4k-1)$ — число составное.

163. Квадрат целого числа при делении на 3 имеет остаток 0 или 1 (см. задачу **140**), поэтому и сумма цифр квадрата имеет при делении на 3 остаток 0 или 1. Число $1970=3\cdot 656+2$ и, следовательно, суммой цифр точного квадрата быть не может.

164. Пусть $10a+b$ — число, тогда $100a^2+20ab+b^2=\\=(10a^2+2ab)\cdot 10+b^2$ — квадрат числа. Число $10a^2+2ab$ — четно, а цифра десятков нечетна, следовательно, $b^2=\\=10(2k+1)+d$ (т. е. b^2 имеет нечетное число десятков), что возможно лишь при $b=4$ или $b=6$, но и в том, и в другом случае b^2 оканчивается цифрой 6, значит, и $(10a+b)^2$ оканчивается цифрой 6.

165. Не может. Действительно, если бы каждый сыграл 7 партий, то $15\cdot 7$ равнялось бы удвоенному числу партий (ибо каждую партию считаем дважды), т. е. $15\cdot 7$ равнялось бы четному числу, что неверно.

166. *Ответ.* Нельзя. (См. решение задачи **165**.)

167. *Ответ.* Не существует. (См. решение задачи **165**.)

168. Если A и B знакомы, то назовем пару (A, B) «знакомством». Тогда, если l — число знакомств и $x_1, x_2, \ldots, x_{953}$ — число знакомых первого, второго и т. д., последнего ученика, то $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{953}=2l$, ибо в сумму каждое «знакомство» входит дважды. Итак, сумма $x_1+x_2+\ldots+x_{953}$ целых чисел четна, значит, количество нечетных слагаемых в этой сумме заведомо четно. А так как всего слагаемых — нечетное количество (953), то среди слагаемых есть четное число, т. е. имеется среди собравшихся хотя бы один, число знакомых x_i которого четно.

169. Предположим, что карточки удалось выложить в ряд. Занумеруем их и обозначим через a_k номер первой, через b_k — номер второй карточки с цифрой k. Тогда по условию $b_k-a_k=\\=k+1$ $(k=0, 1, \ldots, 9)$ и

$$\sum_{k=0}^{9}(b_k-a_k)=1+2+3+\ldots+10=55,$$

или

$$\sum_{k=0}^{9}b_k-\sum_{k=0}^{9}a_k=55.$$

С другой стороны, $\sum\limits_{k=0}^{9} a_k + \sum\limits_{k=0}^{9} b_k$ — сумма всех номеров карточек, значит,

$$\sum_{k=0}^{9} a_k + \sum_{k=0}^{9} b_k = 1 + 2 + \ldots + 20 = 210,$$

отсюда $2 \cdot \sum\limits_{k=0}^{9} b_k = 265$, что невозможно, ибо слева стоит четное, а справа — нечетное число.

170. Улитка может ползти лишь по двум взаимно перпендикулярным направлениям, которые условно назовем горизонтальным (движение налево или направо) и вертикальным (вверх и вниз). Если улитка вернется в точку A, то она направо от A проползет такой же путь, какой потом налево, т. е. если k_1 раз по 15 минут будет ползти направо, то потом k_1 раз будет возвращаться; аналогично, если k_2 раза будет двигаться налево, то столько же раз будет возвращаться направо. Таким образом, по горизонтали она перемещается $2(k_1 + k_2) \cdot 15$ минут. Аналогично покажем, что на движение по вертикали она затратит $2(k_3 + k_4) \cdot 15$ минут. Через каждые 15 минут улитка поворачивает на 90°, значит, чередуются вертикальные и горизонтальные перемещения, т. е. по вертикали пройдено столько же отрезков, сколько по горизонтали или $k_3 + k_4 = k_1 + k_2$, откуда время движения равно $30(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) = 60(k_1 + k_2)$ минут или $k_1 + k_2$ часов.

171. Так как $a_i = \pm 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то $a_i a_k = \pm 1$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$. Рассмотрим произведение

$$(a_1 a_2) \cdot (a_2 a_3) \cdot (a_3 a_4) \ldots (a_n a_1).$$

Очевидно, $(a_1 a_2)(a_2 a_3) \ldots (a_n a_1) = \pm 1$, но $(a_1 a_2)(a_2 a_3) \ldots (a_n a_1) = (a_1 a_2 \ldots a_n)^2 \geqslant 0$, значит, $(a_1 a_2) \ldots (a_n a_1) = 1$, поэтому число m отрицательных множителей среди n сомножителей ($(a_1 a_2)$ и т. д.) — есть число четное. Итак, $m = 2k$. Но $a_1 a_2 + a_2 a_3 + \ldots + a_n a_1 = 0$, значит, число положительных слагаемых равно числу отрицательных, откуда $n = 2m = 4k$, т. е. n делится на 4.

172. Указание. Если a, b — цифры числа, то $a + b = 11$, т. е. искомые числа 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92.

173. Если число N разлагается в произведение двух множителей, то меньший из них не превосходит $\sqrt{N}$, т. е. при $N = 1601$ меньший сомножитель меньше 40, следовательно, простой делитель меньшего числа не превосходит 37. Поэтому следует проверить делимость 1601 на простые числа 2, 3, 5, …, 37.

174. Числа, меньшие p^3 и взаимно простые с ним, это те, которые взаимно просты с простым числом p, т. е. те, которые не кратны p. Чисел, кратных p и не превосходящих p^3, будет $p^3 : p = p^2$. Поэтому среди чисел, меньших p^3, имеется $(p^3 - 1) - (p^2 - 1) = p^3 - p^2$ чисел, взаимно простых с p^3.

175. Пусть a и b — два двузначных числа, тогда $100a + b$ — четырехзначное число. По условию $100a + b = k \cdot ab$, отсюда $b = a(kb - 100)$, т. е. b делится на a. Итак, $b = ma$, но a и b

двузначны, поэтому m однозначно. Так как $100a + b = 100a + ma = a(100 + m)$ и $100a + b = kab$, то $a(100 + m) = kab$, т. е. $100 + m = kb$ или $100 + m = kma$, откуда $100 = m(ka - 1)$. Итак, m — делитель числа 100, кроме того, m однозначно, значит, $m = 1, 2, 4, 5$.

Так как $ka - 1 = \frac{100}{m}$, или $ka = \frac{100}{m} + 1$, причем a двузначно, то отпадают для m значения 1 и 5, ибо $\frac{100}{1} + 1$ не делится ни на какое двузначное число a; при $\frac{100}{5} + 1 = 21$ имеем $a = 21$ и тогда $b = m \cdot a = 5 \cdot 21$ трехзначно. При $m = 2$

$$ka = 51, \quad a = 17, \quad b = 34;$$

при $m = 4$

$$ka = 26, \quad a = 13, \quad b = 52.$$

Ответ. 17 и 34; 13 и 52.

176. $\overline{abc} - (a + b + c) = (100a + 10b + c) - (a + b + c) = 99a + 9b = 9(11a + b)$, т. е. первая разность — это трехзначное или двузначное число, которое делится на 9. Поэтому сумма цифр первой разности делится на 9, следовательно, все последующие разности делятся на 9. Так как сумма цифр трехзначных чисел, делящихся на 9, равна 9 или 18 или 27, то каждая последующая разность меньше предыдущей на одно из этих трех чисел, т. е. разности образуют убывающую последовательность $\{a_n\}$, причем $a_n - a_{n+1} \geqslant 9$.

Заметим, что в каждой сотне есть числа, сумма цифр которых равна 18. В первой сотне одно такое число (99), во второй сотне — два (189 и 198), в третьей — три (279, 288, 297) и т. д., в десятой сотне таких чисел уже 10 (909, ..., 990) (кроме того, в десятой сотне есть число, сумма цифр которого равна 27 (число 999)). При переходе через такие числа мы уменьшаем предыдущее число уже на 18.

Итак, если исходное число 999, то мы уменьшаем его вначале на 27, затем 4 раза — на 18, потом — при переходе от числа 900 к меньшему — на 9 и в дальнейшем при переходе через каждую сотню уменьшаем на 9, а в пределах одной сотни — на 9 или 18. Итак, за 13 рассмотренных переходов от числа к разности исходное число 999 уменьшено на $27 + 10 \cdot 18 + 2 \cdot 9 = 225$. Очевидно, что 774 можно уменьшить до 0 не больше, чем за 86 перехода, значит, потребуется даже меньше 100 шагов, чтобы получить нуль.

Если же исходное число $\overline{abc} < 999$, то построенная последовательность чисел $a_0 = \overline{abc}$, $a_1 = \overline{abc} - (a + b + c)$ и т. д., по доказанному, задается двумя рекуррентными формулами

1) $a_k = a_{k-1} - 9$ или

2) $a_m = a_{m-1} - 18$, где $k, m \geqslant 2$,

причем после перехода через каждую сотню обязательно встречаются два соседних члена последовательности, связанных формулой 2). Так как a_1 делится на 9 и последовательность убывающая, то найдется номер n такой, что (впервые) $a_n = 0$. Тогда $a_1 = a_1 - a_n = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_{n-1} - a_n)$ или $a_1 = 9a + 18b$, где a — число разностей, равных 9, и b — число разностей, равных 18, и $n = a + b + 1$. Если $100(t-1) \leqslant$ $\leqslant a_1 < 100t$, то (по ранее доказанному) $b \geqslant t - 1$, откуда

$$a_1 = 9a + 18b = 9(a+b) + 9b = 9(n+b-1).$$

Итак, $100t > 9(n+b-1) \geqslant 9(n+t-2)$ или $9n < 91t +$ $+ 18 \leqslant 9(91+2)$ (ибо $t \leqslant 9$), т. е. $n \leqslant 93$; итак, разности обратятся в нуль не позднее чем на 93-м шаге.

177. Пусть $(k+1) + (k+2) + \ldots + (k+n) = 1971$ или $\frac{(2k+n+1)n}{2} = 1971$, т. е. $(2k+n+1)n = 2 \cdot 3^3 \cdot 73$. Очевидно, $2k + n + 1 \geqslant n + 1 > n$ и $73 > 2 \cdot 3^3$, то 73 заведомо не является делителем n, отсюда для n находим следующие значения: $n = 1$; 2; 3; 6; 9; 18; 27; 54, т. е. число 1971 можно представить как сумму нескольких последовательных натуральных чисел восемью способами.

178. Среди n последовательных натуральных чисел $n+1$, $n+2, \ldots, 2n$ заведомо есть числа, кратные каждому k, где $1 \leqslant k \leqslant n$, поэтому наименьшее общее кратное чисел $n+1$, $n+2, \ldots, 2n$ есть наименьшее общее кратное всех чисел $1, 2, 3, \ldots, 2n$.

179. Если q_i — какой-то делитель числа n, то $n = q_i p_i$ (по определению делителя числа), где p_i — тоже делитель, причем, если $q_i \neq q_j$, то и $p_i \neq p_j$. Пусть $q_1 < q_2 < q_3 < \ldots < q_s$ — все делители числа n. Тогда $p_1 > p_2 > p_3 > \ldots > p_s$ — те же самые делители, но записанные в обратном порядке. Из равенства $n = q_i p_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ получаем $n^s = q_1 p_1 \cdot q_2 p_2 \cdot \ldots \cdot q_s p_s$ или $n^s = (q_1 q_2 \ldots q_s)(p_1 p_2 \ldots p_s)$; следовательно, $n^s =$ $= (q_1 q_2 \ldots q_s)^2$ и $q_1 \ldots q_n = \sqrt{n^s}$, что и требовалось доказать.

180. Доказательство проведем от противного. Пусть (x, y) — натуральное решение, тогда $ab - ax = by$, или $a(b - x) = by$, следовательно, by делится на a, но a и b взаимно просты, значит, y делится на a, т. е. $y = ka$. Аналогично можно показать, что x делится на b, т. е. $x = mb$. Подставив в исходное уравнение, получим $amb + bka = ab$, откуда $m + k = 1$, что невозможно при натуральных m и k.

181. Данное уравнение можно записать в виде $xy - x -$ $- y + 1 = 1$, или $(x-1)(y-1) = 1$. Произведение двух целых чисел равно 1, значит, оба равны $+1$ или -1; следовательно, или $x - 1 = y - 1 = 1$ и $x = y = 2$, или $x - 1 =$ $= y - 1 = -1$ и $x = y = 0$.

182. Перепишем данное уравнение так: $6x^2 - 24 = 50 - 5y^2$, т. е. $6(x^2 - 4) = 5(10 - y^2)$, откуда имеем $x^2 - 4 = 5u$, $10 - y^2 = 6v$ и, следовательно, $u = v$. Итак, $x^2 = 4 + 5u$, т. е. $4 + 5u \geqslant 0$, откуда $u \geqslant -4/5$; аналогично $10 - y^2 = 6u$, т. е. $10 - 6u \geqslant 0$, откуда $u \leqslant 5/3$. Целое число u удовлетворяет двойному неравенству: $-4/5 \leqslant u \leqslant 5/3$, значит, $u = 0$ или $u = 1$. При $u = v = 0$ получим $10 = y^2$, где y — целое, что неверно. Пусть $u = v = 1$, тогда $x^2 = 9$, $y^2 = 4$.

Ответ.

$$\begin{cases} x_1=3, \\ y_1=2, \end{cases} \begin{cases} x_2=3, \\ y_2=-2, \end{cases} \begin{cases} x_3=-3, \\ y_3=2, \end{cases} \begin{cases} x_4=-3, \\ y_4=-2. \end{cases}$$

183. Так как $(18x^2+27y^2)+(x^2+y^2)=729$, то x^2+y^2 делится на 3, поэтому $x=3u$, $y=3v$ и $19u^2+28v^2=81$. Повторяя рассуждения, получим $u=3t$, $v=3s$ и $19t^2+28s^2=9$. Последнее уравнение, очевидно, не имеет решений в целых числах, а значит, и исходное уравнение решений не имеет.

184. Преобразуем исходное уравнение так: $2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2=6xyz$. Заметим, что здесь $xyz>0$. Далее,

$$(x^2y^2-2x^2yz+x^2z^2)+(x^2z^2-2xz^2y+y^2z^2)+$$
$$+(y^2z^2-2xy^2z+x^2y^2)=6xyz-2x^2yz-2xz^2y-2xy^2z,$$

т. е.

$$(xy-xz)^2+(xz-yz)^2+(yz-xy)^2=$$
$$=2xyz\,[(1-x)+(1-y)+(1-z)],$$

которое в натуральных числах имеет единственное решение $x=y=z=1$. Так как $xyz>0$, то из натурального можно получить соответствующие ему целые решения, заменив значения двух переменных на противоположные.

Ответ.

$$\begin{cases} x_1=1, \\ y_1=1, \\ z_1=1, \end{cases} \begin{cases} x_2=-1, \\ y_2=-1, \\ z_2=+1, \end{cases} \begin{cases} x_3=-1, \\ y_3=1, \\ z_3=-1, \end{cases} \begin{cases} x_4=1, \\ y_4=-1, \\ z_4=-1. \end{cases}$$

185. Исходное уравнение запишем так: $(1+x)(1+x^2)=2^y$. Следовательно, $1+x$ и $1+x^2$ суть делителя числа 2^y, т. е. степени числа 2, поэтому $1+x=2^m$, $1+x^2=2^{y-m}$, откуда

$$x=2^m-1, \quad x^2=2^{y-m}-1.$$

Из первого равенства имеем $x^2=2^{2m}-2^{m+1}+1$, поэтому $2^{2m}-2^{m+1}+1=2^{y-m}-1$ или

$$2^{y-m}+2^{m+1}-2^{2m}=2.$$

I случай. Пусть $m=0$. Тогда $2^y+2-1=2$, или $2^y=1$, откуда $y=0$. Далее из уравнения $1+x=2^m$ найдем $x=0$. Итак, $x=y=0$.

II случай. Пусть $m>0$. Из уравнения $2^{y-m}+2^{m+1}-2^{2m}=2$ следует $2^{y-m-1}+2^m-2^{2m-1}=1$. Так как 2^m и 2^{2m-1} целые (ибо $m>0$ и m целое), то 2^{y-m-1} целое, поэтому из $2^{y-m-1}(1+2^{2m-y+1}-2^{3m-y})=1$ следует $2^{y-m-1}=1$, $1+2^{2m-y+1}-2^{3m-y}=1$, или

$$y-m-1=0, \quad 2m-y+1=3m-y,$$

откуда $m=1$ и $y=2$; следовательно, $x=2^m-1=2-1=1$.

Ответ.

$$\begin{cases} x_1=0, \\ y_1=0, \end{cases} \begin{cases} x_2=1, \\ y_2=2. \end{cases}$$

186. Очевидно, что при $x=1$ $y^2=1$ и при $x=3$ $y^2=9$, т. е. находим следующие решения:

$$\begin{cases} x_1=1, \\ y_1=1, \end{cases} \begin{cases} x_2=1, \\ y_2=-1, \end{cases} \begin{cases} x_3=3, \\ y_3=3, \end{cases} \begin{cases} x_4=3, \\ y_4=-3. \end{cases}$$

Заметим, что при $x=2$ имеем $1!+2!=3\neq y^2$ и при $x=4$ имеем $1!+2!+3!+4!=33\neq y^2$.

Если же $x\geqslant 5$, то (так как $5!+6!+\ldots+x!=10N$) $1!+2!+3!+4!+5!+\ldots+x!=33+10N$ — число, оканчивающееся цифрой 3, значит, оно не является квадратом целого числа.

Ответ.

$$\begin{cases} x_1=1, \\ y_1=1, \end{cases} \begin{cases} x_2=1, \\ y_2=-1, \end{cases} \begin{cases} x_3=3, \\ y_3=3, \end{cases} \begin{cases} x_4=3, \\ y_4=-3. \end{cases}$$

187. Первое решение. Разложим 10/7 в цепную дробь:

$$\frac{10}{7}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}.$$

Из уравнения $x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}=\frac{10}{7}$ получим

$$x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}},$$

и из единственности разложения рационального числа в цепную дробь следует $x=1$, $y=2$, $z=3$.

Второе решение. Преобразуем уравнение

$$x+\frac{z}{1+yz}=1+\frac{3}{7}.$$

Тогда x — целая, $\frac{z}{1+yz}$ — дробная часть, поэтому

$$\begin{cases} x=1, \\ \dfrac{z}{1+yz}=\dfrac{3}{7}. \end{cases}$$

Из второго уравнения следует

$$\frac{1+yz}{z}=\frac{7}{3}$$

или $y+\frac{1}{z}=2+\frac{1}{3}$, откуда $y=2$, $z=3$.

188. Пусть $x \leqslant y \leqslant z$, тогда $x+y+z \leqslant 3z$, а так как $x+y+z=xyz$, то $xyz \leqslant 3z$ или $xy \leqslant 3$. Если бы $x=y=z$, то $z^3=3z$ или $z^2=3$, что невозможно при целом z. Значит, хотя бы два из чисел x, y, z неравные, поэтому $xy<3$, т. е. $xy=2$, либо $xy=1$.

Если $xy=2$, то $x=1$, $y=2$, и из исходного уравнения найдем $z=3$.

Если бы $xy=1$, то $x=y=1$, и из исходного уравнения получим $2+z=z$, что невозможно.

Из найденного решения $x=1$, $y=2$, $z=3$ найдем остальные перестановками.

Ответ. (1, 2, 3); (1, 3, 2); (2, 1, 3); (2, 3, 1); (3, 1, 2); (3, 2, 1).

189. По условию $x \geqslant 2$, $y \geqslant 2$, откуда $x^y \geqslant 4$ и $z = x^y+1 \geqslant 5$; кроме того, x^y+1 простое, значит, нечетное, поэтому x^y — четное, откуда x — четное (и простое!), т. е. $x=2$. Если бы $y=2k+1$, то $z=2^{2k+1}+1=(2+1)(2^{2k}-2^{2k-1}+\ldots+1)$, т. е. делится на 3, но $z \geqslant 5$, значит, z не простое. Итак, y четное и простое, т. е. $y=2$, откуда $z=5$.

Ответ. $x=2$, $y=2$, $z=5$.

190. Из уравнения $x=1960+y-28\sqrt{10y}$, где x, y — целые, следует, что $28\sqrt{10y}$ целое, поэтому $\sqrt{10y}$ рационально, а тогда это число то же целое (так как квадрат несократимой дроби не может быть целым). Итак, $10y=k^2$, следовательно, $10y$ — квадрат некоторого целого числа и $y=10t^2$. Аналогично покажем, что $x=10s^2$. Тогда из исходного уравнения получим $|t|+|s|=14$; следовательно, для целого $|t|$ возможны 15 разных значений: $t=0, 1, 2, 3, \ldots, 14$, а значит, уравнение в целых числах имеет 15 решений.

191. $xy=1+z^2$, т. е. $xy \geqslant 1$, значит, x и y — одного знака, а так как $x+y=2$, то $x>0$ и $y>0$. Но x, y целые, поэтому $x \geqslant 1$, $y \geqslant 1$, откуда $x+y \geqslant 2$, но по условию $x+y=2$. Значит, $x=y=1$, тогда $z=0$.

Другое решение. Так как $x+y=2$, $xy=1+z^2$, то x и y являются корнями уравнения $t^2-2t+1+z^2=0$, откуда $t_{1,2}=1\pm\sqrt{-z^2}$. Так как t действительны, то это возможно лишь при $z=0$, тогда $t_1=x=1$, $t_2=y=1$.

192. Пусть x чашек чая выпила Олимпиада, y чашек чая выпила Сосипатра, z чашек чая выпила Поликсена, тогда

$$\begin{cases} x+5=y+z, \\ y+9=x+z, \end{cases}$$

откуда $2z=14$ и $z=7$. Итак, Поликсена выпила 7 чашек чая. Так как $x-y=2$, то $x>y$. Если бы $y=11$, то $x=13$, а одно из этих чисел, x, y, z, должно быть кратно 3. Значит, $x=11$, тогда $y=x-2=9$, поэтому 11 чашек выпила Олимпиада, а ее отчество по условию — Карповна; 9 чашек выпила Сосипатра Титовна, значит, отчество Поликсены, которая выпила 7 чашек, — Уваровна.

193. Пусть один из колхозников купил x вещей, а его жена a вещей; тогда они заплатили соответственно x^2 рублей и a^2 рублей.

По условию $x^2-a^2=63$ или $(x-a)(x+a)=3\cdot3\cdot7$. Получаем три системы

$$\begin{cases} x+a=9, \\ x-a=7, \end{cases} \begin{cases} x+a=21, \\ x-a=3, \end{cases} \begin{cases} x+a=63, \\ x-a=1 \end{cases}$$

и три пары решений

$$\begin{cases} x=8, \\ a=1, \end{cases} \begin{cases} x=12, \\ a=9, \end{cases} \begin{cases} x=32, \\ a=31. \end{cases}$$

Так как Петр купил 23 вещами более, чем Мария, то Петр купил 32, а Мария 9 вещей. Аналогично заключаем, что Павел купил 12 вещей, а Екатерина 1.

Отсюда: Мария жена Павла, Екатерина жена Андрея, Валентина жена Петра.

194. *Ответы.*

а) $(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)$.

б) $(x^2+x+1)(x^5-x^4+x^3-x+1)$

в) $(x^2+x+1)(x^6-x^5+x^3-x^2+1)$.

г) $(x^4+x^2+2)(x^4-x^2+2)$.

195. а) Многочлен обращается в нуль, если $a=b$ или $b=c$, или $c=a$, поэтому он делится на каждую из трех разностей $a-b$, $b-c$, $c-a$, значит, и на их произведение. Так как многочлен имеет степень 3, то от произведения $(a-b)(b-c)(c-a)$ (также многочлена степени 3) он отличается лишь числовым множителем k. Итак, $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=k(a-b)(b-c)(c-a)$. При $a=1$, $b=0$, $c=-1$ получим $1+1-8=k\cdot1\cdot1\cdot(-2)$, откуда $k=3$, значит, $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a)$.

б) *Ответ.* $(a-x)(a-y)(x-y)(a+x+y)$.

в) *Ответ.* $(x-y)(y-z)(z-x)$.

г) *Ответ.* $3(x+y)(y+z)(z+x)$.

196. Действительно, $x^{95}+x^{94}+\ldots+1=(1+x+\ldots+x^{31})+$
$$+x^{32}(1+x+\ldots+x^{31})+x^{64}(1+x+\ldots+x^{31})=$$
$$=(1+x+x^2+\ldots+x^{31})(1+x^{32}+x^{64}).$$

197. Если $a+b+c=0$, то $c=-(a+b)$. Тогда

а) $$a^3+b^3+c^3-3abc=a^3+b^3-(a+b)^3+3ab(a+b)=$$
$$=(a+b)(a^2-ab+b^2-a^2-2ab-b^2+3ab)=0,$$

б) $$a^3+a^2c-abc+b^2c+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)+$$
$$+c(a^2-ab+b^2)=(a^2-ab+b^2)(a+b+c)=0.$$

198. Указание. Так как $b=a-1$, то $a-b=1$, поэтому можно произведение умножить на $a-b$, а затем последовательно заменять произведение разности на сумму разностью квадратов.

199. Так как $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, то $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=1$,

или

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2\left(\frac{xy}{ab}+\frac{xz}{ac}+\frac{yz}{bc}\right)=1.$$

Но

$$\frac{c}{z}=-\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right)=-\frac{ay+bx}{xy},$$

откуда

$$\frac{z}{c} = -\frac{xy}{ay+bx}$$

и

$$\frac{xy}{ab} + \frac{xz}{ac} + \frac{yz}{bc} = \frac{xy}{ab} - \frac{xy}{ay+bx} \cdot \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0,$$

значит,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

200. Пусть $A = 101 \cdot 10001 \cdot \ldots \cdot 100\ldots01$. Тогда

$$A = (10^2+1)\cdot(10^4+1)\cdot(10^8+1)\ldots(10^{2^n}+1) =$$

$$= \frac{1}{10^2-1}\cdot(10^2-1)(10^2+1)(10^4+1)\ldots(10^{2^n}+1) =$$

$$= \frac{1}{99}(10^4-1)(10^4+1)\ldots(10^{2^n}+1) =$$

$$= \frac{1}{99}(10^{2^{n+1}}-1) = \frac{1}{99}\cdot\underbrace{9\ldots9}_{2^{n+1}\text{ девятки}} = 101010\ldots101.$$

201. Указание. a и b можно найти, например, методом неопределенных коэффициентов из тождества

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + ax + b \equiv (x^2 + Ax + B)^2.$$

Ответ. $a = 7/8$, $b = 49/64$.

202. Заметим, что

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} =$$

$$= \sqrt{n+1} - \sqrt{n},$$

поэтому

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1970}+\sqrt{1971}} =$$

$$= (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \ldots + (\sqrt{1971}-\sqrt{1970}) = \sqrt{1971}-1.$$

203. Разложим общий член суммы в сумму простейших дробей

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2+3k} - \frac{1}{k^2+3k+2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3}\right) - \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right).$$

Сумма примет вид

$$\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+3}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=$$
$$=\frac{1}{6}\left[\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)\right]-$$
$$-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)-$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{18}-\frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

204. Сумма

$$S=1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}$$

при $x=1$ равна $S=\frac{n(n+1)}{2}$. В дальнейшем будем считать $x\neq 1$, тогда

$$Sx=x+2x^2+3x^3+\ldots+nx^n,$$
$$S-Sx=1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}-nx^n,$$
$$S(1-x)=\frac{1-x^n}{1-x}-nx^n,$$
$$S=\begin{cases}\dfrac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}, & \text{если } x\neq 1,\\ \dfrac{n(n+1)}{2}, & \text{если } x=1.\end{cases}$$

205. Имеем

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!=$$
$$=(2-1)\cdot 1!+(3-1)\cdot 2!+(4-1)\cdot 3!+\ldots+[(n+1)-1]\,n!=$$
$$=(2!-1!)+(3!-2!)+(4!-3!)+\ldots+[(n+1)!-n!]=$$
$$=(n+1)!-1.$$

206. Покажем вначале, что $\frac{n}{n+1}<\frac{n+1}{n+2}$ (при натуральном n). Рассмотрим разность

$$\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}=\frac{(n+1)^2-n(n+2)}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}>0,$$

значит, $\frac{n+1}{n+2}>\frac{n}{n+1}$. Обозначим $A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\dots\frac{99}{100}$. Так как

$$\frac{1}{2}<\frac{2}{3},\ \frac{3}{4}<\frac{4}{5},\ \dots,\ \frac{99}{100}<\frac{100}{101},$$

то, перемножив все эти неравенства, получим $A<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\dots$ $\dots\frac{100}{101}$. Умножим обе части неравенства на A:

$$A^2<A\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\dots\frac{100}{101}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\dots\frac{99}{100}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\dots\frac{100}{101}\right)=\frac{1}{101}.$$

Итак, $A^2<\frac{1}{101}<\frac{1}{100}$, откуда $A<\frac{1}{10}$.

Чтобы доказать второе неравенство, заметим, что $\frac{n+1}{n}<$ $<\frac{n}{n-1}$. Отсюда

$$A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\dots\frac{99}{100}=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\dots\frac{99}{98}\cdot\frac{1}{100}>\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\dots\frac{100}{99}\cdot\frac{1}{100}$$

и

$$A^2>\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\dots\frac{99}{98}\cdot\frac{1}{100}\right)\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\dots\frac{100}{99}\cdot\frac{1}{100}\right),$$

или

$$A^2>\frac{1}{200}>\frac{1}{225},\quad \text{значит,}\quad A>\frac{1}{15}.$$

Итак,

$$\frac{1}{15}<A<\frac{1}{10}.$$

207. Приведем исходное уравнение к виду

$$x^2-x-a^2x+a^2-b^2x=0,$$

или

$$x^2-x(1+a^2+b^2)+a^2=0. \qquad (1)$$

Найдем дискриминант

$$D=(1+a^2+b^2)^2-4a^2=(1+a^2+b^2+2a)(1+a^2+b^2-2a)=$$
$$=[b^2+(1+a)^2]\cdot[b^2+(1-a)^2]\geqslant 0,$$

значит, у нового квадратного уравнения при любых a и b корни действительные.

I случай $b=0$, $a\neq 0$. Тогда уравнение примет вид $\frac{a^2}{x}=1$, откуда $x=a^2$ — корень этого уравнения.

II случай $a=0$, $b\neq 0$. Тогда имеем $\frac{b^2}{x-1}=1$, откуда $x=1+b^2$.

III случай $a\neq 0$, $b\neq 0$. Уравнение сводится к квадратному, причем $D>0$, поэтому корни квадратного уравнения действительны и различны и не могут одновременно быть недопустимыми для исходного уравнения, ибо из $x_1=0$, $x_2=1$ следует $a^2=0$.

Итак, при любых допустимых a, b уравнение (1) имеет разные действительные корни, хотя бы один из которых есть корень исходного уравнения.

208. Пусть x_0 — общий корень, x_1, x_2 — другие корни уравнений, причем $x_1\neq x_2$, тогда

$$x_0^2+ax_0+bc=0,\quad x_0^2+bx_0+ca=0,$$

откуда $x_0(a-b)+c(b-a)=0$ или $(a-b)(x_0-c)=0$. Но $a\neq b$, значит, $x_0=c$. Кроме того,

$$x_0x_1=bc,\quad x_0x_2=ca,$$

или $cx_1=bc$, $cx_2=ca$, следовательно, $x_1=b$, $x_2=a$ (так как $c\neq 0$), отсюда $x_1+x_2=a+b$. Но по условию x_0, x_1 и x_0, x_2 — корни квадратных уравнений, поэтому $x_0+x_1=-a$, $x_0+x_2=-b$, откуда $2x_0+x_1+x_2=-a-b$, учитывая, что $x_0=c$, $x_1+x_2=a+b$, получим

$$2c+a+b=-a-b\quad\text{или}\quad c=-a-b.$$

Итак, $x_1+x_2=-c$, $x_1\cdot x_2=ab$, значит, x_1, x_2 — корни уравнения $x^2+cx+ab=0$, что и требовалось доказать.

209. Квадратный трехчлен $f(x)=ax^2+bx+c$ не имеет действительных корней, значит, он сохраняет один и тот же знак для всех x. Так как $f(1)=a+b+c<0$, то и $f(0)=c<0$.

210. Так как при $a,b\geqslant 0$ всегда имеет место неравенство $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$, то $1+a_i\geqslant 2\sqrt{a_i}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, откуда $(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)\geqslant 2^n\sqrt{a_1a_2\ldots a_n}=2^n$.

211. Действительно,

$$\frac{a^2}{4}+b^2+c^2-ab+ac-2bc=\left(\frac{a}{2}-b+c\right)^2\geqslant 0.$$

212. Имеем

$$x^4+y^4+z^2+1-2x^2y^2+2x^2-2xz-2x=$$
$$=(x^2-y^2)^2+(x-z)^2+(x-1)^2\geqslant 0.$$

213. Действительно,

$$a^2+b^2+1-ab-a-b=\frac{1}{2}[(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2a+1)+$$
$$+(b^2-2b+1)]=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2]\geqslant 0.$$

214. Имеем

$$\frac{a^2}{3}+b^2+c^2-ab-bc-ca=$$
$$=\frac{a^2}{4}+b^2+c^2-ab-ac-bc+\frac{a^2}{12}=\left(\frac{a}{2}-b-c\right)^2+$$
$$+\frac{a^2}{12}-3bc=\left(\frac{a}{2}-b-c\right)^2+\frac{a^2}{12}-\frac{3}{a}=\left(\frac{a}{2}-b-c\right)^2+\frac{a^3-36}{12a}>0$$

(так как по условию $a^3>36$).

215. Так как $(a-b)^2\geqslant 0$, то $a^2+b^2\geqslant 2ab$ при любых a, b. Поэтому

$$x^2+y^2\geqslant 2xy,$$
$$y^2+z^2\geqslant 2yz,$$
$$z^2+x^2\geqslant 2xz,$$

откуда

$$x^2+y^2+z^2\geqslant xy+yz+xz.$$

216. По условию $a^2+b^2\leqslant 2$, откуда $-a^2-b^2\geqslant -2$. Из $a^2+b^2\geqslant 2ab$ (см. задачу 215) и $-a^2-b^2\geqslant -2$ следует $0\geqslant 2ab-2$ или $2ab\leqslant 2$. Но $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab\leqslant 2+2=4$. Итак, $(a+b)^2\leqslant 4$, откуда $|a+b|\leqslant 2$. Учитывая, что $a+b\leqslant|a+b|$ (по определению абсолютной величины), получим $a+b\leqslant 2$, что и требовалось доказать.

217. Для сторон треугольника a, b, c справедливы неравенства

$$a>|b-c|,\quad b>|a-c|,\quad c>|a-b|,$$

откуда

$$a^2>b^2+c^2-2bc,$$
$$b^2>a^2+c^2-2ac,$$
$$c^2>a^2+b^2-2ab.$$

Складывая эти неравенства, получим

$$a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca).$$

Кроме того,

$$a^2+b^2 \geqslant 2ab,$$
$$b^2+c^2 \geqslant 2bc,$$
$$c^2+a^2 \geqslant 2ca,$$

откуда

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca.$$

218. Так как $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, то

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} <$$
$$< \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n} < 1.$$

219. Первое решение. Обозначим $A_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ $\ldots + \frac{1}{2^n-1}$ и проведем доказательство методом математической индукции (по n).

I. При $n=2$ имеем

$$A_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}, \quad 1 < A_2 < 2,$$

т. е. при $n=2$ утверждение справедливо.

II. Пусть

$$\frac{k}{2} < A_k < k. \tag{1}$$

Тогда $A_{k+1} = A_k + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k+1} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}-1} = A_k + B_k$, где $B_k = \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k+1} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}-1}$ есть сумма 2^k дробей, наибольшая из которых равна $1/2^k$, а наименьшая $1/(2^{k+1}-1)$, откуда

$$\frac{1}{2} < \frac{2^k}{2^{k+1}-1} < B_k < \frac{1}{2^k} \cdot 2^k = 1,$$

т. е.

$$1/2 < B_k < 1. \tag{2}$$

Из неравенств (1) и (2) получаем

$$\frac{k}{2} + \frac{1}{2} < A_k + B_k < k+1,$$

или

$$\frac{k+1}{2} < A_{k+1} < k+1.$$

Итак, неравенство справедливо при $n = 2$. Предположив его справедливость при $n = k$, мы доказали справедливость неравенства для $n = k + 1$, следовательно, неравенство верно для всех $n \geqslant 2$.

Второе решение. Сгруппируем слагаемые суммы

$$A = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots$$
$$\dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) - \frac{1}{2^n},$$

а затем в каждой скобке заменим каждое из слагаемых наименьшим из них, получим $A > \frac{n}{2}$.

Затем иначе сгруппируем слагаемые суммы

$$A_n = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \dots$$
$$\dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n - 1}\right)$$

и в каждой скобке заменим все дроби наибольшей из них, получим $A_n < n$.

220. По условию $x + y + z = 1$ или $(x + y + z)^2 = 1$, т. е. $x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 1$. Но по ранее доказанному в задаче 215 имеем $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + zx$, поэтому $3(x^2 + y^2 + z^2) \geqslant 1$, откуда $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant \frac{1}{3}$.

221. Указание. Сгруппировав и перемножив попарно первую и третью, вторую и четвертую скобки и обозначив $x^2 - 4x - 5 = y$, получим $y(y - 16) = 297$. Решив последовательно эти уравнения, найдем действительные решения исходного уравнения $x_1 = -8$, $x_2 = 4$.

222. Указание. Обозначить $x^2 + 2x - 3$ через y.

Ответ. $x_1 = -1 - \sqrt{8}$, $x_2 = -1 + \sqrt{8}$, $x_3 = 2$, $x_4 = -4$.

223. Указание. Сгруппировав по две дроби с равными числителями и сложив их, получим

$$3 \cdot \frac{2x-5}{x^2-5x} + \frac{2x-5}{x^2-5x+4} + 4 \cdot \frac{2x-5}{x^2-5x+6} = 0,$$

откуда либо $2x - 5 = 0$, либо

$$\frac{3}{x^2-5x} + \frac{1}{x^2-5x+4} + \frac{4}{x^2-5x+6} = 0.$$

Далее поступаем так же, как в задаче 222.

Ответ.

$$x_1 = 2{,}5, \quad x_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{2}, \quad x_{4,5} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

224. Указание. Обозначим $x+1=y$, тогда $(y+1)^4+(y-1)^4=82$, или $y^4+6y^2-40=0$, откуда $y^2=-10$ или $y^2=4$.

Ответ. $x_1=-3$, $x_2=1$.

225. Перепишем уравнение так:

$$\sqrt{3(x+1)^2+4}+\sqrt{5(x+1)^2+9}=5-(x+1)^2.$$

Очевидно,

$$\sqrt{3(x+1)^2+4}\geqslant\sqrt{4}=2,$$

$$\sqrt{5(x+1)^2+9}\geqslant\sqrt{9}=3,$$

следовательно, левая часть уравнения не меньше 5, но правая часть уравнения, наоборот, не больше 5, значит, равенство возможно лишь при таком значении x, при котором обе части уравнения равны 5, т. е. при $x=-1$.

Ответ. $x=-1$.

226. Указание. Так как

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=\sqrt{(x-1)-4\sqrt{x-1}+4}=|\sqrt{x-1}-2|$$

и

$$\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=\sqrt{(x-1)-6\sqrt{x-1}+9}=|\sqrt{x-1}-3|,$$

то уравнение примет вид

$$|\sqrt{x-1}-2|+|\sqrt{x-1}-3|=1.$$

Это уравнение обращается в тождество при $2\leqslant\sqrt{x-1}\leqslant 3$, т. е. при $5\leqslant x\leqslant 10$, и не имеет решений при других допустимых значениях x.

Ответ. $5\leqslant x\leqslant 10$.

227. Заметим, что область допустимых значений $n\leqslant 4$. Преобразуем левую часть уравнения

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

Преобразуем правую часть уравнения

$$\frac{\sqrt{4-n}+4}{\sqrt{4-n}+5}=\frac{\sqrt{4-n}+5-1}{\sqrt{4-n}+5}=1-\frac{1}{\sqrt{4-n}+5}.$$

Тогда исходное уравнение примет вид

$$1-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{\sqrt{4-n}+5},$$

откуда $\sqrt{4-n}+5=n+1$, или $\sqrt{4-n}=n-4$. Так как $\sqrt{4-n}\geqslant 0$, то $n-4\geqslant 0$, следовательно, $n\geqslant 4$, но мы установили также, что $n\leqslant 4$, значит, $n=4$.

Ответ. $n=4$.

228. Указание. Возвести обе части уравнения в куб, сгруппировать члены — утроенные произведения, вынести за скобку $3\sqrt[3]{1-x^2}$ и заменить скобку, сумму радикалов, ее значением a, получим $3\sqrt[3]{1-x^2}\cdot a = a^3 - 2$.

229. Указание. Если уединить корень $2\sqrt{x^2-1}$ и дважды возводить уравнение в квадрат, то придем к квадратному уравнению $8x^2(p-2)+(p-4)^2=0$, откуда

$$x=\sqrt{\frac{(p-4)^2}{8(2-p)}} \quad (\text{при } p<2).$$

Ответ. $x=\dfrac{4-p}{2\sqrt{4-2p}}$, если $p<2$; при $p \geqslant 2$ уравнение не имеет решений.

230. Область допустимых значений определяется системой неравенств

$$4-x^2 \geqslant 0, \quad 1+4x \geqslant 0, \quad x^4-16 \geqslant 0,$$
$$x^2+y^2-2y-3 \geqslant 0.$$

Из третьего неравенства следует $(x^2+4)(x^2-4) \geqslant 0$, т. е. $x^2-4 \geqslant 0$, но $4-x^2 \geqslant 0$, откуда $x^2-4=0$ и $x=\pm 2$. Так как $1+4x \geqslant 0$, то $x=2$. Тогда исходное уравнение принимает вид $\sqrt{9}+\sqrt{1+y^2-2y}=5-y$, или $|y-1|=2-y$. Если $y \geqslant 1$, то $y-1=2y$, $2y=3$ и, следовательно, $y=1{,}5$. Если же $y<1$, то $1-y=2-y$, или $0=1$, что невозможно.

Ответ. $x=2$, $y=1{,}5$.

231. Данная система эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} |x+3| = x+3, \\ |x-3| = 3-x, \end{cases}$$

откуда

$$0 \leqslant x+3, \quad 0 \leqslant 3-x,$$

т. е. $-3 \leqslant x \leqslant 3$.

Ответ. $-3 \leqslant x \leqslant 3$.

232. Указание. Область допустимых значений неизвестных и параметров содержит значения, удовлетворяющие системе неравенств

$$xy \neq 0, \quad ac \neq 0, \quad x \neq \pm y.$$

Обозначив

$$\frac{x+y}{xy}=u, \quad \frac{x-y}{xy}=v, \tag{1}$$

придем к системе двух квадратных уравнений

$$\begin{cases} u+\dfrac{1}{u}=a+\dfrac{1}{a}, \\ v+\dfrac{1}{v}=c+\dfrac{1}{c}, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} u_1=a, \\ v_1=c, \end{cases} \quad \begin{cases} u_2=1/a, \\ v_2=1/c, \end{cases} \quad \begin{cases} u_3=a, \\ v_3=1/c, \end{cases} \quad \begin{cases} u_4=1/a, \\ v_4=c. \end{cases}$$

Подставив найденные значения u, v в систему (1), получим простую систему для нахождения x, y.

233. Из $xy=1$ следует, что x, y — одного знака, а так как $x+y=2-\cos^2 z$, т. е. $2 \geqslant x+y>0$, следовательно, x, y положительны. Поэтому справедливо неравенство $x+y \geqslant 2\sqrt{xy}$, но $xy=1$, значит, $x+y \geqslant 2$. С другой стороны, установлено, что $x+y \leqslant 2$. Следовательно, $x+y=2$, кроме того, по условию $xy=1$, откуда $x=y=1$. Тогда $\cos^2 z=0$, $\cos z=0$. Следовательно, $z=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Ответ. $x=1$, $y=1$, $z=\frac{\pi}{2}+\pi k \ (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

234. Первый способ (указание). Положим $x+y=u$, $xy=v$. Тогда $u^2=x^2+2xy+y^2$, откуда $x^2+y^2=u^2-2xy=u^2-2v$, и система примет вид

$$\begin{cases} u^2-2v=a, \\ u+v=b. \end{cases}$$

Второй способ (указание). Сложив первое уравнение с удвоенным вторым, получим

$$(x+y)^2+2(x+y)=a+2b.$$

235. Будем предполагать, что $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. Заметим, что если одно из неизвестных равно нулю, то заведомо обращается в нуль другое неизвестное, а третье может принимать любое значение, т. е. тройки $(0, 0, z)$; $(0, y, 0)$; $(x, 0, 0)$ — решения системы. Пусть теперь $xyz \neq 0$. Тогда, разделив обе части каждого уравнения на произведение xyz на коэффициент левой части, получим систему

$$\begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=\frac{1}{a}, \\ \frac{1}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{x}=\frac{1}{b}, \\ \frac{1}{z}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{c}, \end{cases}$$

откуда $-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, или

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Складывая полученное уравнение с каждым из преобразованных уравнений системы, получим

$$\begin{cases} 2\cdot\dfrac{1}{x}=-\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}, \\ 2\cdot\dfrac{1}{y}=-\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{c}, \\ 2\cdot\dfrac{1}{z}=-\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}, \end{cases}$$

откуда

$$x=-\frac{2bc}{b+c},\quad y=-\frac{2ac}{a+c},\quad z=-\frac{2ab}{a+b}.$$

236. Указание. Обозначим $x+y=u$, $xy=v$. Тогда

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=u^2-2v,$$
$$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=(u^2-2v)^2-2v^2=u^4-4u^2v+2v^2.$$

По условию $x+y=b$, т. е. $u=b$, тогда из исходной системы получим уравнение $2v^2-4bv+b^4=a$, из которого найдем v.

237. Сложив все уравнения системы, получим

$$(x+y+z)(2x+2y+2z)=288,$$

или $(x+y+z)^2=144$, откуда $x+y+z=\pm 12$. Тогда из исходной системы получим две

$$\begin{cases} (x+y)\cdot 12=72, \\ (y+z)\cdot 12=120, \\ (z+x)\cdot 12=96, \end{cases}\qquad \begin{cases} -(x+y)\cdot 12=72, \\ -(y+z)\cdot 12=120, \\ -(z+x)\cdot 12=96, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x+y=6, \\ y+z=10, \\ z+x=8, \end{cases}\qquad \begin{cases} x+y=-6, \\ y+z=-10, \\ z+x=-8. \end{cases}$$

Учитывая, что для первой из этих систем $x+y+z=12$, найдем $x=2$, $y=4$, $z=6$. Для второй системы $x+y+z=-12$, поэтому $x=-2$, $y=-4$, $z=-6$.

238. Заметим, что искомые решения удовлетворяют условиям $x^2\geqslant y^2$, $y\geqslant 0$. Из первого уравнения следует

$$x^2+y^2+x^2-y^2-2\sqrt{x^4-y^4}=y^2,$$

и система примет вид

$$\begin{cases} 2x^2-2\sqrt{x^4-y^4}=y^2, \\ x^4-y^4=144, \end{cases}$$

откуда $x^4-(2x^2-24)^2=144$, или

$$x^4-32x^2+240=0,$$

откуда

$$x^2=20 \quad \text{или} \quad x^2=12,$$

тогда

$$y^2=16 \quad \text{или} \quad y^2=0,$$

откуда

$$\begin{cases} x_{1,2}=\pm 2\sqrt{5}, \\ y_{1,2}=4, \end{cases} \quad \begin{cases} x_{3,4}=\pm 2\sqrt{3}, \\ y_{3,4}=0. \end{cases}$$

239. Из условий $P(1)=P(-1)$ и $P(2)=P(-2)$ для многочлена $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$ получаем систему

$$\begin{cases} a_1+a_3=-a_1-a_3, \\ 2a_1+8a_3=-2a_1-8a_3, \end{cases}$$

откуда $a_1=a_3=0$ и $P(x)=a_0+a_2x^2+a_4x^4=P(-x)$.

240. *Ответ.* $a_1=8$, $a_2=12$.

241. Преобразуем функцию

$$y=x(x+1)(x+2)(x+3)=(x^2+3x)(x^2+3x+2)=$$
$$=(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)=(x^2+3x+1)^2-1.$$

Следовательно, $y_{\min}=-1$ при $x^2+3x+1=0$, т. е. при $x_1=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$ и при $x_2=\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$.

242. Выделим целую часть

$$\frac{x^2-1}{x^2+1}=1-\frac{2}{x^2+1}.$$

Разность принимает наименьшее значение, когда вычитаемое $\dfrac{2}{x^2+1}$ достигает наибольшего возможного значения, т. е. при минимуме знаменателя x^2+1, но $\min(x^2+1)=1$ (при $x=0$). Следовательно, $y_{\min}=-1$.

243. Первое решение. Так как $a=1-2b$, то

$$ab=(1-2b)\,b=-2b^2+b=$$
$$=-2b^2+b-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=-2\left(b-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8},$$

откуда $\max ab=1/8$ (достигается при $b=1/4$ и, значит, при $a=1/2$).

Второе решение. Так как сумма $a+2b$ постоянна, то произведение $a\cdot 2b$ принимает наибольшее значение при $a=2b$, т. е. $2a=1$, откуда $a=1/2$, $b=1/4$ и $\max(ab)=1/8$.

Ответ. $\max(ab)=1/8$ (достигаются при $a=1/2$, $b=1/4$).

244. Так как $a+b=1$, то

$$a^3+b^3+ab=(a+b)(a^2-ab+b^2)+ab=$$
$$=a^2-ab+b^2+ab=a^2+b^2=a^2+(1-a)^2=2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}.$$

Квадратный трехчлен достигает минимума, равного $1/_2$, при $a = 1/_2$ и $b = 1/_2$.

245. Сумма коэффициентов любого многочлена равна его значению при $x = 1$. Следовательно, сумма коэффициентов многочлена $P(x) = (2 - 3x + x^2)^{1969} \cdot (2 + 3x + x^2)^{1970}$ равна $P(1) = (2 - 3 + 1)^{1969} \cdot (2 + 3 + 1)^{1970} = 0$.

Ответ. 0.

246. Указание. Преобразовать каждый множитель произведения

$$a_k = 1 + \frac{1}{k^2 + 2k} = \frac{k^2 + 2k + 1}{k^2 + 2k} = \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}.$$

247. Указание. Преобразовать каждый множитель произведения

$$a_k = 1 + \frac{2}{k^2 + 3k} = \frac{k^2 + 3k + 2}{k^2 + 3k} = \frac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)}.$$

248. Доказательство проведем методом математической индукции. При $n = 1$ имеем $n^3 + 5n = 6$, т. е. $n^3 + 5n$ делится на 6. Предположим, что при $n = k$ число $k^3 + 5k = 6N$, т. е. делится на 6. Тогда $(k+1)^3 + 5(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 5k + 5 = (k^3 + 5k) + 3(k^2 + k + 2) = 6N + 6\left[\frac{k(k+1)}{2} + 1\right]$, т. е. $n^3 + 5n$ делится на 6 и при $n = k + 1$, ибо $k(k+1)/2$ — целое число. Следовательно, $n^3 + 5n$ делится на 6 при любом n.

249. При $n > 1$ и $k = 1, \ldots, n - 1$ имеем $\frac{1}{n+k} > \frac{1}{2n}$, следовательно,

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

250. Доказательство проведем методом математической индукции.

I. $10 = 1 \cdot 10 = 2 \cdot 5$, т. е. 10 рублей можно выплатить одной десятирублевой купюрой или двумя пятирублевыми.

II. Пусть сумму в k рублей можно выплатить как четным, так и нечетным числом купюр. Тогда, добавив купюру в 1 рубль, получим два способа выплаты суммы в $(k + 1)$ рублей. Следовательно любую сумму в n рублей, где $n \geqslant 10$ можно выплатить как четным, так и нечетным числом купюр.

251. Обозначим $A_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + \ldots + n(3n - 1)$.

I. $n = 1$; $A_1 = 1 \cdot 2 = 2$; $n^2(n + 1) = 2$. Итак, равенство справедливо при $n = 1$.

II. Предположим, что установлено, что при $n = k$ имеем $A_k = k^2(k + 1)$. Тогда

$$A_{k+1} = A_k + (k+1)(3k+2) = k^2(k+1) + (k+1)(3k+2) = (k+1)(k^2+3k+2) = (k+1)(k+1)(k+2) = (k+1)^2(k+2),$$

что и требовалось доказать.

Итак, формула справедлива при $n=1$, предположив справедливость ее при $n=k$, мы доказали ее справедливость и для $n=k+1$, значит, формула верна для всех натуральных значений n.

252. I. $x+\frac{1}{x}$ — целое число (по условию). II. Предположим, что число $x^k+\frac{1}{x^k}$ целое при любом натуральном $k \leqslant n$. Тогда $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)$ — целое число, но

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)=\left(x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}\right)+\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right).$$

Вторая скобка в правой части — целое число (по индуктивному предположению), сумма двух скобок — то же целое число, значит, первое слагаемое $x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}$ — то же число целое. Следовательно, $x^n+\frac{1}{x^n}$ — целое число при любом целом n.

253. Введем обозначение $A_n=2^{3^n}+1$.

I. При $n=1$ имеем $A_1=2^3+1=9$. Итак, A_1 делится на 3^2 и не делится на 3^3.

II. Пусть при $n=k$ число A_k делится на 3^{k+1} и не делится на 3^{k+2}, т. е. $A_k=2^{3^k}+1=3^{k+1}\cdot M$, где M не делится на 3. Тогда

$$A_{k+1}=2^{3^{k+1}}+1=\left(2^{3^k}\right)^3+1=\left(2^{3^k}+1\right)\left(2^{3^k\cdot 2}-2^{3^k}+1\right)=$$
$$=3^{k+1}\cdot M\cdot\left[\left(2^{3^k}+1\right)^2-3\cdot 2^{3^k}\right]=3^{k+1}\cdot M\left[\left(3^{k+1}\cdot M\right)^2-3\cdot 2^{3^k}\right]=$$
$$=3^{k+2}\cdot M\left[3^{2k+1}\cdot M^2-2^{3^k}\right].$$

Очевидно, что A_{k+1} делится на 3^{k+2}, но не делится на 3^{k+3}.

Следовательно, утверждение доказано для любого натурального n.

254. Указание. Имеются 3 двухцветные раскраски, 4 трехцветные, когда каждым цветом окрашено по 2 грани, и 6 трехцветных, у которых одним цветом окрашена одна грань, другим — две и третьим три грани. Следовательно, существует 13 различных раскрасок.

255. Каждый сектор можно раскрасить в любой из n цветов, поэтому для круга с p секторами получим n^p раскрасок, среди которых n^p-n не одноцветных. Каждая из этих раскрасок поворотами переходит в $p-1$ одинаковую с ней, значит, существенно различных не одноцветных раскрасок будет $\frac{n^p-n}{p}$, откуда общее число раскрасок равно $\frac{n^p-n}{p}+n$.

256. Указание. Из решения задачи 255 следует, что число $\frac{n^p - n}{p} + n$ целое (как количество раскрасок), откуда $\frac{n^p - n}{p}$ целое.

257. *Ответ.* 24.

258. Указание. Если

$$\begin{cases} m + n \leqslant 2m, \\ m + n \leqslant 3n, \end{cases}$$

то число белых шаров среди вынутых может принимать любое значение от 0 до $m + n$, т. е. имеем $m + n + 1$ случай распределения цветов среди вынутых шаров. Аналогично рассмотреть два других случая.

Ответ. $3n + 1$, если $n < \frac{m}{2}$; $m + n + 1$, если $\frac{m}{2} \leqslant n \leqslant m$; $2m + 1$, если $m < n$.

259. Указание. Для каждого из 10 учащихся есть 4 возможности (попасть в любую аудиторию). Следовательно, всего 4^{10} различных способов.

260. *Ответ.* а) 19 (степени числа 3 от нулевой степени до 18-й). б) 30 (ибо общий вид делителей $2^k \cdot 3^m$, где $0 \leqslant k \leqslant 4$, $0 \leqslant m \leqslant 5$). в) $(n + 1)(m + 1)(k + 1)$.

261. *Ответ.* $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2500$.

262. Числа первой тысячи, в записи которых нет единицы, это те, у которых цифра сотен, десятков и единиц — любая из 9 цифр 0, 2, 3, ..., 9, но надо исключить число 0 (как последовательность трех нулей), поэтому таких чисел имеется $9 \cdot 9 \cdot 9 - 1 = 728$. Значит, чисел, у которых есть цифра 1, имеется $1000 - 728 = 272$. Итак, больше чисел, в записи которых нет цифры 1.

263. Всего чисел 7! В каждом разряде каждая цифра встречается 6! раз, поэтому сумма цифр в любом разряде равна

$$1 \cdot 6! + 2 \cdot 6! + 3 \cdot 6! + 4 \cdot 6! + 5 \cdot 6! + 6 \cdot 6! + 7 \cdot 6! = \\ + 6!(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) = 6! \cdot 28$$

и делится на 9, значит, сумма всех чисел тоже делится на 9 (ибо она равна $6! \cdot 28(1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^6)$.

264. Возьмем одну из точек в качестве начала ломаных. Тогда для проведения первого звена — две возможности, второго — тоже две возможности (ибо следующая выбираемая вершина будет одной из двух соседних с построенным звеном) и так далее, до построения восьмого звена включительно, которое соединит последнюю вершину построенной ломаной с одной из двух оставшихся точек, для построения же последнего — девятого звена — уже нет выбора и имеется лишь одна возможность. Так мы строим 2^8 ломаных, один из двух концов которых находится в выбранной точке, но любая из 10 точек может быть началом, поэтому $2^8 \cdot 10$ — удвоенное число ломаных (ибо

каждую ломаную будем подсчитывать дважды, меняя роли начала и конца), а общее число ломаных $l = \frac{1}{2} \cdot 2^8 \cdot 10 = 10 \cdot 2^7$.

265. Предположим, что a, b, c — разные числа, пусть $a < b < c$. По условию a^k, b^k, c^k — длины сторон треугольника, поэтому

$$c^k < a^k + b^k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{1}$$

Но

$$c^k = [b + (c-b)]^k = b^k + kb^{k-1} \cdot (c-b) + \ldots \geqslant$$
$$\geqslant b^k + kb^{k-1}(c-b).$$

Возьмем k такое, что $k(c-b) > b$; при так выбранном k имеем

$$c^k \geqslant b^k + kb^{k-1}(c-b) > b^k + b^k > b^k + a^k,$$

что противоречит неравенству (1). Следовательно, среди чисел a, b, c есть равные.

266. Очевидно, $1970^2 - 1 < 1970^2$ или $1969 \cdot 1971 < 1970^2$, т. е. $2\sqrt{1969 \cdot 1971} < 2 \cdot 1970$, откуда $2 \cdot 1970 + 2\sqrt{1969 \cdot 1971} < 4 \cdot 1970$, или $(\sqrt{1969} + \sqrt{1971})^2 < 4 \cdot 1970$ (так как $2 \cdot 1970 = 1969 + 1971$), следовательно, $\sqrt{1969} + \sqrt{1971} < 2\sqrt{1970}$.

Ответ. $\sqrt{1969} + \sqrt{1971} < 2\sqrt{1970}$.

267. Рассмотрим разность

$$\cos(\sin x) - \sin(\cos x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \sin x\right) - \sin(\cos x) =$$

$$= 2\cos\frac{\frac{\pi}{2} - \sin x + \cos x}{2} \sin\frac{\frac{\pi}{2} - \sin x - \cos x}{2} =$$

$$= 2\cos\frac{\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{2} \sin\frac{\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{2}.$$

Так как $-1 \leqslant -\sin\alpha \leqslant 1$, то $-\sqrt{2} \leqslant -\sqrt{2}\sin\alpha \leqslant \sqrt{2}$, откуда

$$\frac{\pi}{2} - \sqrt{2} \leqslant \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}\sin\alpha \leqslant \frac{\pi}{2} + \sqrt{2}$$

и

$$0 < \frac{\pi - 2\sqrt{2}}{4} \leqslant \frac{\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}\sin\alpha}{2} \leqslant \frac{\pi + 2\sqrt{2}}{4} < \frac{\pi}{2},$$

т. е. угол $\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\sqrt{2}\sin\alpha}{2}$ положителен и лежит в первой четверти, поэтому как косинус, так и синус этого угла положительны, значит,

$$2\cos\frac{\dfrac{\pi}{2}-\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)}{2}\sin\frac{\dfrac{\pi}{2}-\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{2}>0,$$

т. е. $\cos(\sin x)-\sin(\cos x)>0$.

Ответ. $\cos(\sin x)>\sin(\cos x)$.

268. Так как разрешается менять местами лишь фишки, стоящие через одну, то фишка, стоящая на четном месте, может оказаться лишь на четном месте, поэтому, например, сотая фишка не может стать первой.

Ответ. Не удастся.

269. Имеем

$$6+66+666+\ldots+\underbrace{6\ldots6}_{n\text{ шестерок}}=\frac{2}{3}(9+99+\ldots+\underbrace{99\ldots9}_{n})=$$

$$=\frac{2}{3}[(10-1)+(10^2-1)+\ldots+(10^n-1)]=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{10^{n+1}-10}{9}-n\right).$$

270. I случай. Если $n=2k+1$, то

$$1^2-2^2+3^2-\ldots-(2k)^2+(2k+1)^2=1^2+(3^2-2^2)+$$
$$+(5^2-4^2)+\ldots+[(2k+1)^2-(2k)^2]=$$
$$=1+5+9+13+\ldots+(4k+1)=$$
$$=\frac{(4k+2)(k+1)}{2}=(2k+1)(k+1)=\frac{n(n+1)}{2}.$$

II случай. Если $n=2k$, то

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(2k-1)^2-(2k)^2=$$
$$=-\{(2^2-1)+(4^2-3^2)+\ldots+[(2k)^2-(2k-1)^2]\}=$$
$$=-[3+7+11+\ldots+(4k-1)]=-\frac{(4k+2)\cdot k}{2}=$$
$$=-\frac{n(n+1)}{2}.$$

Ответ. $(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}$.

271. Любое из этих выражений имеет вид

$$A_n=a_{k+1}+a_{k+2}+\ldots+a_{k+n},$$

где $a_i = 2i - 1$, n — номер выражения, k — число нечетных чисел входящих в предыдущие выражения, поэтому $k = 1 + 2 + \ldots + (n-1) = (n-1)n/2$, откуда

$$A_n = (2k+1) + \ldots + (2k+2n-1) = \frac{(4k+2n)\,n}{2} = (2k+n)\,n =$$
$$= n\,[n + n(n-1)] = n(n + n^2 - n) = n^3.$$

Итак, каждое выражение — куб, что и требовалось доказать.

272. Обозначим через X искомую сумму попарных произведений, через A — сумму квадратов. Тогда $A = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$; как известно,

$$A = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

и

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

отсюда

$$(1+2+3+\ldots+n)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \text{ или } A + 2X = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \text{ и}$$

$$X = \frac{1}{2}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] =$$
$$= \frac{n(n+1)}{24}\,[3n(n+1) - 2(2n+1)] = \frac{n(n+1)(3n^2-n-2)}{24}.$$

273. *Ответ.* $10^{10} + 9$.

274. Указание. Перекидывая фигурку около «вертикальной» оси, а затем около «горизонтали», показать, что одно и то же число a стоит во всех белых клетках и то же самое число b стоит во всех черных клетках раскрашенной доски, затем из $3a + b = 3b + a$ получим $a = b$, из $4a = 4$ следует $a = 1$.

275. Заметим, что $a_1 \cdot a_2 \ldots a_{25} = b_1 \cdot b_2 \ldots b_{25}$, так как каждое из этих произведений равно произведению всех чисел таблицы. Если бы $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \ldots + a_{25} + b_{25} = 0$, то среди слагаемых было бы 25 положительных и 25 отрицательных (ибо каждое слагаемое есть ± 1). Поэтому, если имеется n отрицательных чисел среди 25 чисел a_i, то среди 25 чисел b_j отрицательных будет $25 - n$. Числа n и $25 - n$ разной четности, поэтому одно из произведений $a_1 \cdot a_2 \ldots a_{25}$; $b_1 \cdot b_2 \ldots b_{25}$ положительно, а другое отрицательно, что противоречит ранее доказанному их равенству.

276. Рассмотрим арифметическую прогрессию a, $a + d$, ..., $a + (n-1)d$. По условию $S_n = \dfrac{[2a + (n-1)\,d]\,n}{2} = n^2$, отсюда $2a + (n-1)d = 2n$, т. е. $n(d-2) = d - 2a$. Здесь a, d постоянны, значит, $d - 2a$ постоянно, а n — любое натуральное число, следовательно, равенство возможно лишь, если $d = 2$, $d = 2a$, т. е. $d = 2$, $a = 1$.

271. Пусть $d_1 < d_2 < \ldots < d_k$ — все делители числа n, расположенные в порядке их возрастания, тогда $d_1 = 1$, $d_k = n$,

откуда $1 \leqslant d_i \leqslant n$ и $d_1 d_k = d_2 d_{k-1} = \ldots = d_i d_{k-i+1} = \ldots$ $\ldots = n$ (так как n есть произведение некоторых двух своих делителей).

I. Рассмотрим

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} d_i}{k},$$

где k — число всех делителей числа n. Тогда

$$\frac{\sum_{1}^{k} d_i}{k} = \frac{2\sum_{1}^{k} d_i}{2k} = \frac{(d_1 + d_k) + (d_2 + d_{k-1}) + \ldots + (d_k + d_1)}{2k} =$$

$$= \frac{\frac{d_1 + d_k}{2} + \frac{d_2 + d_{k-1}}{2} + \ldots + \frac{d_k + d_1}{2}}{k} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\sqrt{d_1 d_k} + \sqrt{d_2 d_{k-1}} + \ldots + \sqrt{d_k d_1}}{k} = \frac{k \cdot \sqrt{n}}{k} = \sqrt{n},$$

ибо $\frac{d_i + d_{k-i+1}}{2} \geqslant \sqrt{d_i d_{k-i+1}} = \sqrt{n}$.

II. Рассмотрим теперь разность $(n+1) - (d_i + d_{k-i+1})$. Если $d_i = 1$, то $d_{k-i+1} = n$ и разность равна нулю. Пусть теперь $1 < d_i \leqslant d_{k-i+1}$ (т. е. d_i — меньший из двух соответствующих делителей, произведение которых равно n). Тогда

$$(n+1) - (d_i + d_{k-i+1}) = d_i d_{k-i+1} + 1 - d_i - d_{k+1-i} =$$
$$= d_i (d_{k-i+1} - 1) - (d_{k-i+1} - 1) = (d_i - 1)(d_{k-i+1} - 1) > 0.$$

Итак, для любой пары делителей d_i, d_{k-i+1} такой, что $d_i \cdot d_{k-i+1} = n$, имеем $d_i + d_{k-i+1} \leqslant n + 1$ $(i = 1, \ldots, k)$, откуда

$$2\sum_{1}^{k} d_i = \sum_{i=1}^{k} (d_i + d_{k-i+1}) \leqslant k\,(n+1),$$

т. е.

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} d_i}{k} \leqslant \frac{n+1}{2}.$$

Итак,

$$\sqrt{n} \leqslant \frac{\sum_{1}^{k} d_i}{k} \leqslant \frac{n+1}{2},$$

что и требовалось доказать.

278. Расположим гири в порядке возрастания их веса и станем раскладывать их по одной в три кучки поочередно, то слева направо, то справа налево, т. е.

I кучка	II кучка	III кучка
1	2	3
6	5	4
7	8	9 и т. д.

После любого четного числа таких операций (в частности, после $552:3=184$ операции) веса кучек будут равны.

279. Указание. Первые 9 гирь разложить, например, так:

$$\text{I кучка}\quad 1+9+5,$$
$$\text{II кучка}\quad 6+7+2,$$
$$\text{III кучка}\quad 3+4+8,$$

а оставшиеся 546 надо раскладывать так же, как в задаче 278.

280. Так как при одной игре в шахматы сумма очков двух противников равна единице, то общая сумма очков всех участников в каждый момент равна числу сыгранных партий. По условию, каждый шахматист половину своих очков набрал от трех последних, значит, от остальных он набрал тоже половину. Если в турнире участвовало x игроков, то всего они сыграли $x(x-1)/2$ партий и, следовательно, набрали столько же очков. Три игрока, занявшие последние места, сыграли между собой 3 партии, которые дали им 3 очка — половину от всего количества очков, набранных ими в турнире, следовательно, всего у них 6 очков. Лучшие $x-3$ игрока сыграли между собой $(x-3)(x-4)/2$ партий, в этих партиях набрали столько же очков, сколько было партий; это по условию составляет половину набранных ими очков, а всего они набрали $(x-3)(x-4)$ очков. Таким образом, $(x-3)(x-4)+6=x(x-1)/2$, или $x^2-13x+36=0$, откуда $x_1=9$, $x_2=4$, второй ответ не удовлетворяет условиям задачи (лучший шахматист мог бы набирать очки лишь от трех остальных — худших, а это по условию должно составлять лишь половину набранных им очков). Таким образом, в турнире принимало участие 9 человек.

Ответ. $x=9$.

281. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_8$ — количество очков, набранных каждым шахматистом. По условию

$$x_1 > x_2 > \ldots > x_8.$$

Лучший участник сыграл 7 партий, значит, $x_1 \leqslant 7$, так как $x_2 < x_1$, то $x_2 \leqslant 6{,}5$. Четыре последних шахматиста сыграли между собой 6 партий, в которых набрали 6 очков, значит, общее число их очков не меньше 6, т. е. $x_5+x_6+x_7+x_8 \geqslant 6$, но по условию $x_2=x_5+x_6+x_7+x_8$, значит, $x_2 \geqslant 6$. Итак, $6 \leqslant x_2 \leqslant 6{,}5$, т. е. $x_2=6{,}5$ или $x_2=6$. Если бы $x_2=6{,}5$, то второй шахматист выиграл 6 партий, а одну свел вничью, следовательно, первый шахматист не выиграл у второго, поэтому $x_1 \leqslant 6{,}5$, т. е. $x_1 \leqslant x_2$, что противоречит условию. Итак, $x_2 \neq 6{,}5$, значит,

$x_2 = 6$, следовательно, $x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 6$, т. е. четыре последних шахматиста все свои очки набрали лишь из встречи друг с другом, а всем первым игрокам — проиграли, в частности, седьмой игрок проиграл третьему.

282. Соединить точку M с вершиной O угла, удвоить отрезок OM до отрезка OA (M — середина OA) и построить параллелограмм $OBAC$, стороны OB и OC которого лежат на сторонах данного угла, а OA является его диагональю. Тогда M — середина диагонали OA (по построению), поэтому вторая диагональ BC пройдет через данную точку M и разделится ею пополам. Отрезок BC — искомый.

283. Указание. Построим отрезок, соединяющий две из трех заданных точек, получим среднюю линию параллелограмма. Соединив третью данную точку с серединой построенного отрезка и удвоив полученный отрезок, получим вторую среднюю линию. Задача имеет три решения.

284. Возьмем произвольную точку A на средней прямой l_2, проведем через нее прямую l_0, $l_0 \perp l_2$ и обозначим через B и C точки ее пересечения с прямыми l_1 и l_3. Отложив по одну сторону от l_0 на прямой l_1 отрезок $BA_1 = AC$, а на l_3 отрезок $CA_2 = AB$, получим A_1, A, A_2 — три вершины квадрата. Можно построить еще два квадрата с вершиной в точке A, лежащих по ту же сторону от l_0, если: 1) отложить $BA_1 = BC$ на прямой l_1 и достроить A_1A до квадрата, 2) отложить $CA_2 = CB$ и достроить A_2A до квадрата.

285. Построить $\triangle AOO_1$ такой, что $AO = \frac{2}{3} m_a$, $AO_1 = \frac{2}{3} m_b$, $OO_1 = \frac{2}{3} m_c$, провести медиану из вершины A, удвоить ее, получим AB — основание искомого $\triangle ABC$. Удвоив отрезок O_1O, получим отрезок O_1C; точка C будет третьей вершиной $\triangle ABC$.

286. Анализ. Если $ABCD$ — искомый четырехугольник и M, N, K — середины трех равных сторон AB, BC, CD, то треугольники $\triangle MBN$ и $\triangle NCK$ равнобедренные, значит, B и C лежат на прямых OB и OC, перпендикулярных соответственно к MN или NK и проходящих через их середину (точка O — точка пересечения OB и OC). Поэтому, построив BO и CO и зная точку N, можно построить и отрезок BC с концами на сторонах $\angle BOC$ и с серединой в данной точке N.

Исследование. Если точки M, N и K не лежат на одной прямой, то построение возможно, причем задача имеет три решения.

287. Проведем окружность с центром в вершине данного угла и затем циркулем откладываем на окружности (последовательно) 19 раз дугу в 19° (заданную дугу) — получим дугу в $19 \cdot 19° = 361°$.

288. а) Центр окружности есть точка пересечения прямых, соответственно параллельных данным и отстоящих от них на расстояние радиуса (задача имеет четыре решения, если данные прямые пересекаются). б) Центр — пересечение окружностей, концентрических с данной, и прямых, параллельных данной пря-

мой (задача имеет в самом общем случае 8 решений, может и не иметь ни одного).

289. Центр окружности — точка пересечения биссектрисы угла и перпендикуляра к стороне, который восставлен из данной точки A.

290. Построив точку A_1, симметричную A относительно одной стороны угла, и точку B_1, симметричную B относительно другой стороны угла, соединим их отрезком A_1B_1, тогда точки L, M пересечения этого отрезка со сторонами угла — искомые. Доказательство легко следует из замены ломаной $ALMB$ отрезком A_1LMB_1 той же длины, что и ломаная. Заметим, что в общем случае надо проводить два построения (точка A_1 может быть симметрична A как относительно одной стороны угла, так и относительно другой) и из двух полученных отрезков A_1B_1 и $A_1'B_1'$ выбрать кратчайший.

291. Построить точку M_1, симметричную точке M, относительно AO, затем N_1 — симметричную N относительно BO, соединить их отрезком M_1N_1; обозначив через K точку пересечения его с лучом AO, определим искомое направление MK.

292. А н а л и з. Если M, N — середины двух боковых сторон, то MN — средняя линия треугольника; точка, симметричная одной из данных точек относительно биссектрисы, лежит на основании треугольника.

П о с т р о е н и е. Строим точку N_1, симметричную точке N относительно заданной прямой, и через N_1 проведем прямую, параллельную MN, и обозначим через B — точку пересечения построенной прямой и прямой, на которой лежит биссектриса. B — вершина треугольника, вторую вершину A найдем, удвоив отрезок BN, и третью C — удвоив отрезок AM.

293. П о с т р о е н и е. Проведем дугу с центром в любой точке A окружности радиуса, равного данному отрезку a, построим хорду $AB = a$, затем окружность, концентрическую данной, касающуюся хорды. Через данную точку проведем хорды, касающиеся построенной окружности (задача может иметь два, одно и ни одного решения).

294. П о с т р о е н и е. Проведем прямые AC и BC; пусть D — вторая точка пересечения AC с окружностью, E — вторая точка пересечения BC с окружностью и K — точка пересечения прямых DB и AE. Прямая KC — искомый перпендикуляр к AB.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В $\triangle ABC$ прямые BD и AE — высоты (углы $\angle ADB$ и $\angle AEB = \angle AEC$ — прямые, как вписанные, опирающиеся на диаметр); K — точка пересечения двух высот, прямая CK проходит через третью вершину и точку пересечения двух высот, значит, CK есть третья высота, т. е. $CK \perp AB$.

295. *Ответы.* а) Окружность, касающаяся данной в точке A, с диаметром AO (O — центр заданной окружности). б) Окружность с диаметром AO. в) Часть дуги окружности, построенной на AO как на диаметре, лежащая внутри данной окружности.

296. *Ответ.* Центр квадрата и замкнутая линия, окружающая данный квадрат и состоящая из четырех отрезков, равных и параллельных сторонам квадрата, и четырех четвертей окружностей единичного радиуса, соединяющих эти отрезки.

297. *Ответ.* Восьмиугольник, четыре стороны которого равны и параллельны сторонам квадрата и отстоят от центра квадрата на расстояние в 1,5 единицы.

298. Указание. «Выпрямим» ломаную AMB, отложив на продолжении отрезка BM отрезок $MK = AM$. Так как $\triangle AMK$ равнобедренный, то $\angle AKB = \frac{\angle AMB}{2} = \frac{\alpha}{2}$. Значит, K — точка, из которой отрезок AB виден под постоянным углом $\frac{\alpha}{2}$, т. е. переменная точка дуги сегмента, вмещающего данный угол. Искомая точка X — середина отрезка KB — принадлежит множеству середин хорд, проходящих через данную точку. Следовательно, искомое множество точек есть кривая, составленная из дуг четырех окружностей, проходящих через середину AB, один из концов диаметра CD $(CD \perp AB)$ и одну из точек A или B.

299. Указание. а) Либо $AB = BM$, тогда точка M лежит на окружности радиуса AB с центром в точке B. Либо $AM = BM = CM$, тогда M — центр окружности, описанной около $\triangle ABC$. Либо $MA = AB = MC$, тогда M — точка, симметричная B относительно AC.

300. *Ответ.* Отрезок, соединяющий середину основания с серединой высоты, опущенной на основание.

301. *Ответ.* Искомая точка — пересечение прямой l с отрезком, соединяющим A и B (если они лежат по разные стороны от l), и с отрезком, соединяющим одну из данных точек с точкой, симметричной другой данной точке относительно l (если точка A и B лежат по одну сторону от l).

302. *Ответ.* Равнобедренный треугольник.

303. *Ответ.* Точка пересечения диагоналей.

304. *Ответ.* Отрезок искомой прямой, отсекаемый сторонами угла, делится данной точкой пополам.

305. Анализ. Пусть $AB'C'$ — произвольный треугольник, вершины B', C' которого лежат на сторонах угла. Построим точки A_1 и A_2, симметричные точке A относительного сторон угла. Так как $AB' = A_1B'$ и $AC' = A_2C'$, то $P = AB' + B'C' + C'A = A_1B' + B'C' + C'A_2$, поэтому периметр минимален, если A_1, B', C' и A_2 лежат на одной прямой.

Построение. Построив точки A_1 и A_2, симметричные A относительно сторон угла, соединим их отрезком и обозначим через B и C точки пересечения его со сторонами угла. $\triangle ABC$ искомый.

Доказательство. «Выпрямив» границу треугольника, получаем отрезок A_1A_2; для любого же другого $\triangle AB'C'$ получим ломаную $A_1B'C'A_2$, которая длиннее отрезка A_1A_2; значит, периметр $\triangle ABC$ минимален.

Исследование. Построение точек A_1, A_2 всегда возможно и единственно. Можно показать, что точки A_1, A_2 лежат в полуплоскости, ограниченной прямой, перпендикулярной биссектрисе данного угла и проходящей через его вершину, и, очевидно, вне угла. Поэтому отрезок A_1A_2 пересекает обе стороны угла, т. е. точки B и C существуют и единственны. Итак, задача всегда имеет решение, которое единственно.

306. Первый случай. Прямая l пересекает основание BC $\triangle ABC$. Тогда, если h_1, h_2 — расстояния до l от точек B и C, S — площадь $\triangle ABC$, AE — отрезок l, лежащий в $\triangle ABC$, то

$$h_1 \cdot AE + h_2 \cdot AE = 2S,$$
$$AE(h_1 + h_2) = 2S,$$

значит, $h_1 + h_2$ минимальна, если AE максимальна, но $\max AE$ есть длина бо́льшей стороны, выходящей из вершины A, откуда

$$\min(h_1 + h_2) = \frac{2S}{\max AE} = \frac{2S}{\max(AB, AC)} = \min(h_b, h_c),$$

т. е. l проходит через большую из боковых сторон AB, AC.

Второй случай. Прямая l не пересекает отрезок BC. Построим точку B' такую, что $AB' = AB$ и B' лежит на продолжении отрезка BA, и рассмотрим $\triangle B'AC$. Прямая l пересекает основание $B'C$ треугольника $AB'C$, поэтому, по ранее доказанному, минимум $(h_1' + h_2) = \min(h_{b'}, h_{c'})$, где h_1', h_2 — расстояния от B' и C до l. Но (по построению) прямая l равноудалена от точек B и B', значит, $h_1' = h_1$, кроме того, $h_{b'} = h_b$, $h_{c'} = h_c$ (так как в треугольниках ABC и $AB'C$ стороны AB' и AB равны, сторона AC и высота h_c общие, значит, соответственно равны и остальные высоты), откуда $\min(h_1 + h_2) = \min(h_b, h_c)$. Следовательно, и в этом случае l проходит через большую из боковых сторон AB, AC.

307. Указание. Построение и доказательство аналогично построению и доказательству, проведенному в задаче 306.

308. Сумма внутренних углов выпуклого семнадцатиугольника равна $2d(17-2) = 30d$, а сумма углов четырнадцати треугольников равна $14 \cdot 2d = 28d$, при разрезании же многоугольника на треугольники сумма внутренних углов треугольников окажется не меньшей суммы внутренних углов многоугольника. Следовательно, выпуклый семнадцатиугольник нельзя разрезать на 14 треугольников.

309. Если k — число треугольников, на которые диагонали разбили многоугольник, то для суммы внутренних углов многоугольника имеем $2d(n-2) = 2dk$, откуда $k = n-2$. Обозначим через x число диагоналей. Тогда (так как диагонали по условию не пересекаются) общее число всех сторон ($3k$) в k треугольниках равно $3k = n + 2x$ (каждая диагональ — сторона двух треугольников), значит,

$$x = \frac{3k - n}{2} = \frac{3(n-2) - n}{2} = n - 3.$$

Итак, число треугольников (k) и число диагоналей (x) не зависят от способа разбиения.

310. Два любых соседних колеса вращаются в противоположном направлении, значит, первое и последнее колеса также имеют противоположные направления вращения, что возможно тогда и только тогда, если число колес четно. Итак, колеса такой системы могут вращаться, если число колес четно, и не могут в противном случае.

311. Проведем диагональ l, выходящую из вершины острого угла, и построим на ней, как на диаметре, круг. Так как две вершины, не лежащие на этом диаметре, являются вершинами тупых углов, то они лежат внутри круга; значит, диагональ, их соединяющая, меньше диаметра, т. е. диагонали l.

312. *Ответ.* 12 см.

313. Рассмотрим $\triangle ABC$ со сторонами a, b, c и медианой $AD = m_a$. Из $\triangle ACD$ имеем $m_a > b - \frac{a}{2}$, а из $\triangle ABD$ следует, что $m_a > c - \frac{a}{2}$, складывая полученные неравенства, будем иметь

$$2m_a > b + c - a,$$

или

$$m_a > \frac{b + c - a}{2}.$$

Удвоив медиану AD, получим $\triangle AKB$, в котором $AK = 2m_a$, $AB = c$, $BK = b$, поэтому

$$2m_a < b + c, \quad \text{или} \quad m_a < \frac{b + c}{2}.$$

Итак,

$$\frac{b + c - a}{2} < m_a < \frac{b + c}{2}.$$

Аналогично получим

$$\frac{c + a - b}{2} < m_b < \frac{c + a}{2},$$

$$\frac{a + b - c}{2} < m_c < \frac{a + b}{2},$$

откуда

$$\frac{a + b + c}{2} < m_a + m_b + m_c < a + b + c,$$

что и требовалось доказать.

314. Указание. Показать, что если у семиугольника есть две оси симметрии, то многоугольник правильный и поэтому имеет 7 осей симметрии. Следовательно, у семиугольника может быть осей симметрии: 0, 1, 7.

315. Пусть $n - 1$, n, $n + 1$ — стороны треугольника, h — высота, x, y — отрезки средней стороны, тогда

$$\begin{cases} x + y = n, \\ x^2 = (n + 1)^2 - h^2, \\ y^2 = (n - 1)^2 - h^2, \end{cases}$$

откуда $x^2 - y^2 = 4n$ и $x - y = 4$, что и требовалось доказать.

316. Площадь каждого круга $\pi\frac{a^2}{4n^2}$, откуда площадь всех кругов $\frac{\pi a^2}{4}$, т. е. не зависит от n, а следовательно, площадь части, не покрытой кругами, равна $\frac{a^2}{4}(4-\pi)$, т. е. также не зависит от n.

317. Доказательство от противного. Если бы нашлась точка M, лежащая внутри четырехугольника, не покрытая ни одним кругом, то каждый из углов с вершиной в точке M, опирающийся на сторону четырехугольника, острый (как угол с вершиной вне круга, опирающийся на диаметр), значит, сумма четырех таких углов меньше $4d$, в то время как эта сумма равна $4d$ (ибо составляет полный угол).

318. Пусть a, b — основания трапеции, h_1, h_2 — высоты треугольников, h — высота трапеции. Тогда $h=h_1+h_2$, $S_1=\frac{ah_1}{2}$, $S_2=\frac{bh_2}{2}$, искомая площадь трапеции $S_{\text{тр}}=\frac{(a+b)(h_1+h_2)}{2}$.

Из $\triangle AOD\infty\triangle BOC$ следует $\frac{h_1}{h_2}=\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}}$, откуда $\frac{a+b}{b}=\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_2}}$ и $\frac{h_1+h_2}{h_2}=\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_2}}$. Поэтому

$$\frac{(a+b)(h_1+h_2)}{bh_2}=\frac{(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2}{S_2},$$

но $bh_2=2S_2$, откуда $\frac{(a+b)(h_1+h_2)}{2}=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$.

319. Указание. Стороны треугольника равны, как равноудаленные от центра хорды описанной около него окружности.

320. Указание. Вне оси симметрии лежат либо 2, либо все 4 вершины четырехугольника. В первом случае диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны (и четырехугольник — описанный), во втором случае ось симметрии перпендикулярна двум сторонам четырехугольника и проходит через их середины.

321. Пусть $a\leqslant b\leqslant c\leqslant d\leqslant e$ — данные отрезки. Предположим, что все треугольники, составленные из этих отрезков, не остроугольные. Тогда $c^2\geqslant a^2+b^2$, $d^2\geqslant b^2+c^2$, $e^2\geqslant c^2+d^2$, откуда $c^2+d^2+e^2\geqslant a^2+2b^2+2c^2+d^2$, или

$$e^2\geqslant a^2+2b^2+c^2=(a^2+b^2)+(b^2+c^2)\geqslant$$
$$\geqslant a^2+b^2+2bc\geqslant a^2+b^2+2ab=(a+b)^2,$$

откуда $e\geqslant a+b$, значит, из отрезков a, b, e нельзя составить треугольник, что противоречит условию задачи.

322. а) Построим равнобедренный $\triangle ABC$, у которого основание $a=510$ см и $h_a=0{,}4$ см. Тогда $S_\triangle=\frac{1}{2}a\cdot h_a=102$ см$^2>$ >100 см^2, и так как $b=c>255$ см, то $h_b=h_c<1$. Мы

построили треугольник, площадь которого больше 100 см² и все высоты которого меньше 1 см.

б) Если $h_a > 100$, $h_b > 100$, то $AB > 100$, $AC > 100$, $BC > 100$ (так как сторона не меньше высоты, выходящей из той же вершины). Но тогда $S_\triangle = \frac{1}{2} h_a \cdot BC > 50 \cdot 100 > 1$. Следовательно, не существует треугольника, у которого две высоты были бы больше 100 см, а площадь меньше 1 см².

323. $\triangle ABC$ — правильный. Пусть, например, M лежит на $\smile AB$. Докажем, что тогда $MC = MA + MB$. Отложим на MC отрезок MB', $MB' = MB$. Так как $\smile BC = 120°$, то $\angle BMB' = 60°$, значит, $\triangle BMB'$ — равносторонний. Тогда $\angle MBA = \angle CBB'$ (эти углы дополняют $\angle ABB'$ до двух равных углов $\angle MBB' = \angle ABC = 60°$), поэтому $\triangle MBA = \triangle B'BC$ (по двум сторонам $MB = BB'$ и $AC = BC$ и углу между ними). Следовательно, $AM = B'C$, но по построению $MB = MB'$, поэтому $AM + MB = B'C' + MB'$, или $AM + MB = MC$, что и требовалось доказать.

324. Указание. При $n = 4$ и $n = 5$ можно построить многоугольники, одна сторона которых равна 1, а диагонали, «ограничивающие» эту сторону, равны 2. Если же $n \geqslant 6$, то, если $AB = 1$, диагонали, выходящие из одной из вершин и соединяющие ее с A и B, равны (как целочисленные, разность которых < 1); поэтому при $n \geqslant 6$ будут два разных равнобедренных треугольника с основанием AB и третьей вершиной — в вершине n-угольника, значит, одна из этих вершин лежит внутри другого треугольника, т. е. внутри многоугольника, что противоречит его выпуклости.

Ответ. $n = 4; 5$.

325. Указание. Новый треугольник подобен данному с коэффициентом подобия $k = \frac{r+h}{r} = \left(1 + \frac{h}{r}\right)$, где r — радиус окружности, вписанной в данный треугольник, т. е. $r = \frac{2S}{P}$, тогда $k = \left(1 + \frac{hP}{2S}\right)$.

Ответ.

$$S_H = S\left(1 + \frac{hP}{2S}\right)^2, \quad P_H = P\left(1 + \frac{hP}{2S}\right).$$

326. *Ответ.* Искомое множество точек есть совокупность трех отрезков, — двух, проходящих через точку B и параллельных сторонам квадрата, и третьего отрезка, параллельного выбранной диагонали и проходящего через точку, симметричную точке B относительно этой диагонали.

327. Если M — середина DE, N — середина CE, то MN — средняя линия $\triangle DEC$; аналогично KL — отрезок, соединяющий середины AF и BF — средняя линия $\triangle AFB$. Так как EF — медиана каждого из этих двух треугольников, то EF пересекается с каждым из двух отрезков MN и KL в точке O (середине EF), которая является серединой каждого из отрезков MN и KL. Следовательно, $MKNL$ — параллелограмм (так как точка пересечения диагоналей делит каждую из них пополам).

328. Рассмотрим $ABDE$, так как $AB \parallel DE$, то $ABDE$ — трапеция. Если O — точка пересечения диагоналей, то $\triangle EOD$ и $\triangle AOB$ — равнобедренные, откуда $\triangle AOE = \triangle BOD$, значит, $AE = BD$, т. е. трапеция $ABDE$ равнобедренная, поэтому около нее можно описать окружность. Обозначим через F' и C' точки пересечения этой окружности с продолжением сторон AF и DC. Тогда $AF'DC'$ — трапеция и по построению она вписана в круг, значит, она — равнобедренная, поэтому равны ее диагонали $F'C' = AD$. (Заметим, что диагоналями трапеции могут оказаться DF' и AC', а AD и $F'C'$ — боковыми сторонами трапеции, но и в этом случае $F'C' = AD$). Но $CF = AD$, значит, $F'C' = FC$, что возможно лишь при совпадении точек: $F' = F$, $C' = C$.

329. Разобьем круг на 6 равных секторов (с вершиной в центре круга). Тогда в каждый сектор попадет не больше, чем по точке (ибо расстояние между двумя любыми точками одного сектора не больше 1). Если бы в каждый сектор попало по точке, то нашлись бы две точки, угол между радиус-векторами которых был не больше 60° и, следовательно, расстояние между ними не больше 1. Итак, можно выбрать не больше пяти точек.

330. Пусть A, B, C — три из заданных n точек, являющиеся вершинами треугольника наибольшей площади. Рассмотрим $\triangle KLM$, для которого A, B, C являются серединами сторон. Тогда $S_{KLM} = 4S_{\triangle ABC} \leqslant 4$ и треугольник KLM содержит все заданные точки (иначе точка D, лежащая вне $\triangle KLM$, оказалась бы в полуплоскости, ограниченной одной из прямых, проходящих через стороны $\triangle KLM$, и не содержащей $\triangle ABC$, поэтому площадь треугольника с вершинами в точке D и двух вершинах из вершин $\triangle ABC$ будет больше $S_{\triangle ABC}$).

331. *Ответ.* Нельзя.

332. Заменим каждый квадрат большей фигурой, ограниченной линией, отстоящей от контура квадрата на расстоянии $^1/_2$ (эта линия состоит из четырех единичных отрезков и четырех дуг окружностей радиуса $^1/_2$). Каждая такая фигура имеет площадь, равную $3 + \frac{\pi}{4}$, а 120 «раздутых» фигур покроют площадь, не превышающую $120 \cdot \left(3 + \frac{\pi}{4}\right) = 360 + 30\pi$. Окружим границу заданного прямоугольника полосой ширины $^1/_2$. Площадь полосы равна 44. Таким образом, общая площадь полосы и всех «раздутых» фигур: $360 + 30\pi + 44 = 404 + 30\pi < 404 + 94{,}5 < 500$, т. е. меньше площади прямоугольника ($S_{пр} = 25 \cdot 20 = 500$). Следовательно, в прямоугольнике есть точка O, непокрытая полосой и «раздутыми» квадратами и, значит, отстоящая как от контура прямоугольника, так и от всех квадратов на расстояние, большее $^1/_2$. Круг радиуса $^1/_2$ с центром в точке O — искомый.

333. Формулу для подсчета максимального числа заборов находят методом эмпирической индукции, а затем доказывают ее методом математической индукции. При $n = 1$ число заборов

$x_1 = 1$; при $n = 2$ можно окружить забором каждый из домов, а затем построить забор, огораживающий оба дома, итак, число заборов $x_2 = 3$, поэтому можно предполагать, что в общем случае $x_n = 2n - 1$.

Предположим теперь, что формула $x_n = 2n - 1$ верна при всех $n \leqslant k$, и докажем ее для $n = k + 1$.

Рассмотрим некоторую максимальную систему заборов. Тогда заведомо найдутся два забора, отделяющих одну группу домов (l домов) от другой группы в m домов (иначе можно было бы такие заборы добавить, т. е. система не была бы максимальной).

Система заборов, окружающих l домов, также максимальна, значит, содержит $2l - 1$ заборов, аналогично имеем $2m - 1$ заборов, окружающих группу в m домов (по индуктивному предположению). Никакой забор не может огораживать одновременно дома из двух рассматриваемых групп домов. Следовательно, имеется только еще один забор — огораживающий все дома. Итак, имеем

$$x_{k+1} = (2l - 1) + (2m - 1) + 1 = 2(l + m) - 1 = 2(k + 1) - 1,$$

что и требовалось доказать.

334. Выберем из заданных кругов круг наибольшего радиуса r_1 и все круги, пересекающиеся с ним. Они образуют первую фигуру площади S_1. Так как радиусы всех кругов фигуры S_1 не больше r_1, то вся фигура лежит в круге радиуса $3r_1$, однако не заполняет этот круг (ибо всего кругов конечное число), значит, $S_1 < \pi(3r_1)^2 = 9\pi r_1^2$, площадь же первого выбранного круга равна πr_1^2, следовательно, она составляет больше, чем $1/9$ от площади S_1. Если $S_1 = 1$, то выбранный круг радиуса r_1 — искомый. Если же $S_1 < 1$, то выбросим все круги, входящие в первую фигуру, и из оставшихся кругов выберем снова круг (второй) максимального радиуса r_2 и, повторив все предыдущие рассуждения, получим из новых кругов фигуру площадью S_2, причем $\pi r_2^2 > \frac{1}{9} S_2$ и второй круг заведомо не пересекается с первым. Продолжив этот процесс, последовательно выберем круги радиусов $r_1, r_2, \ldots, r_k$ и составим соответствующие им фигуры площадей $S_1, S_2, \ldots, S_k$, составленные из различных кругов. Так как всего кругов — конечное число, то процесс выбора кругов и составления фигур заведомо оборвется. Итак,

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_k = 1, \quad \frac{1}{9} S_i < \pi r_i^2 \quad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

следовательно, для суммы площадей попарно непересекающихся кругов имеем $\pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \ldots + \pi r_k^2 > \frac{1}{9}$, что и требовалось доказать.

335 (Кочерыгин Александр, 9 класс). Разобьем 50 человек, знающих английский язык, на 50 групп, по одному в каждой. К тем из них, кто не знает французский, добавим (из оставшихся студентов) одного, знающего французский, что всегда

возможно, ибо есть 50 групп и 50 человек, знающих французский. Итак, имеем 50 групп, в каждой из которых ровно один знает английский и один — французский. Эти группы, вообще говоря, могут быть трех типов. Тип A_2: в группе 2 человека знают испанский язык; тип A_1: в группе один человек знает испанский; тип A_0: в группе нет знающих испанский. Если остались студенты, знающие испанский и не входящие в эти группы, то заведомо имеются и группы типа A_0, поэтому можем всех оставшихся знатоков испанского языка присоединить (по одному) в группы типа A_0. Теперь все владеющие испанским включены в состав 50 групп, поэтому если есть k групп типа A_2, то имеется ровно k групп типа A_0 (так как $2k + 0 \cdot y + 1 \cdot x = 50$, где x — число групп типа A_1 и $k + x + y = 50$, откуда $y = k$). Значит, число x групп типа A_1 четно, поэтому можно объединить по две группы типа A_1 и каждую группу типа A_2 с некоторой группой A_0. Получим 25 групп, в каждой из которых ровно по 2 человека знают каждый из трех языков. Объединив теперь по 5 групп в одну, получим 5 групп, в каждой из которых ровно 10 человек знают как английский, так и французский и испанский языки.

336 (Ахулков Сергей, 7 класс). Проведем через точку, в которой находится волк, две прямые, параллельные диагоналям квадрата. Очевидно, если собаки будут находиться в точках пересечения этих прямых со сторонами квадрата, то они не выпустят волка из квадрата. Покажем, что скорость движения этих точек не превышает скорости собаки. Для этого разложим вектор скорости волка на составляющие, параллельные сторонам квадрата: $v_в^2 = v_1^2 + v_2^2$; $v_в$ — скорость волка, v_1, v_2 — ее составляющие в направлении сторон квадрата. Тогда $v_1 + v_2$ — наибольшая скорость движения точек на сторонах квадрата. Максимум $v_1 + v_2$ достигается одновременно с максимумом $(v_1 + v_2)^2 = v_в^2 + 2v_1v_2$, а значит, вместе с v_1v_2 или $(v_1v_2)^2$. Но $(v_1v_2)^2 = v_1^2\left(v_в^2 - v_1^2\right)$ — квадратный двучлен от v_1^2, поэтому он достигает максимума при $v_1^2 = v_в^2/2$ или $\max v_1 = v_в/\sqrt{2}$, откуда $\max(v_1 + v_2) = \sqrt{2}\,v_в < 1{,}5v_в$, что и требовалось доказать.

337 (Ахулков Сергей, 8 класс). Пусть $0 < a \leqslant b \leqslant c$ — заданные положительные числа. Так как $abc = 1$, то все три числа не могут быть одновременно больше единицы или меньше единицы. Кроме того, невозможно $a = b = c = 1$, ибо тогда $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Значит, среди трех заданных чисел есть как большие, так и меньшие единицы. Если бы чисел, больших 1, было два, т. е. $c \geqslant b > 1$, то из

$$a + b + c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

получим

$$\frac{1}{bc} + b + c > bc + \frac{1}{b} + \frac{1}{c},$$

или

$$(b+c)bc+1>b+c+b^2c^2,$$

$$(b+c)(bc-1)>b^2c^2-1, \quad (b+c)(bc-1)>(bc+1)(bc-1),$$

но $bc>1$ (по предположению), значит, $b+c>bc+1$, или $c-1>b(c-1)$, а так как $c>1$ (по предположению), то $1>b$, что противоречит предположению.

338. (Бабинский Алексей, 8 класс). Пусть выражение $\overline{a_1a_2a_3\ldots a_6a_7a_8a_9a_{10}\ldots a_{17}}$ — данное семнадцатизначное число. Исследуем цифры суммы

$$\overline{a_1a_2a_3\ldots a_7a_8a_9a_{10}\ldots a_{16}a_{17}}+\overline{a_{17}a_{16}a_{15}\ldots a_{11}a_{10}a_9a_8\ldots a_2a_1}=$$
$$=\overline{x_{17}x_{16}x_{15}\ldots x_{11}x_{10}x_9x_8\ldots x_2x_1}.$$

Предположим, что все «внутренние» цифры суммы $\overline{x_{17}x_{16}\ldots x_1}$ нечетны. Так как $a_9+a_9=2a_9$ четно, а по предположению цифра x_9 нечетна, то в этот разряд переходит единица из предыдущего разряда, т. е. $a_{10}+a_8\geqslant 9$. Но если бы $a_{10}+a_8=9$, то $x_8=0$, что противоречит предположению. Итак, $a_{10}+a_8\geqslant 10$, значит, при сложении a_8+a_{10} единица переходит к следующему разряду, но x_{11} нечетно, значит, a_7+a_{11} четно, но x_7 нечетно, значит, в x_7 входит единица из предыдущего разряда и так далее, наконец, из того, что в x_{17} входит единица из предыдущего разряда, т. е. $x_{17}=a_1+a_{17}+1$, следует, что либо x_{17} четно, либо x_{17} нечетно, но тогда четно a_1+a_{17}, т. е. четна цифра x_1.

339 (Будаев Виктор, 8 класс). Возьмем произвольное натуральное число A, которое делится на 2^{100} и имеет не меньше 100 цифр. Пусть на некотором k-м месте справа впервые встретилась цифра, отличная от 1 и 2. Тогда,

а) если эта цифра есть 3 или 4, то прибавим к A число $2^{103}\cdot 10^{k-1}$, которое имеет на k-м месте справа цифру 8 (ибо 2^{4l+3} оканчивается цифрой 8), а последние цифры — нули, поэтому у суммы

$$B=A+2^{103}\cdot 10^{k-1}$$

уже последние k цифр — это единицы или двойки,

б) если k-я цифра справа 5 или 6, то возьмем сумму

$$B=A+2^{104}\cdot 10^{k-1},$$

в) если k-я цифра справа у числа A есть 7 или 8, то рассмотрим

$$B=A+2^{102}\cdot 10^{k-1},$$

г) если k-я цифра 9 или 0, то возьмем

$$B=A+2^{101}\cdot 10^{k-1}.$$

Во всех случаях полученное число B, очевидно, делится на 2^{100}. Затем аналогично «уничтожаем» последнюю из цифр числа B, отличную от 1 и 2, и так далее, пока не придем к некоторому числу N, все 100 последних цифр которого единицы или двойки.

Отбросив у числа N первые цифры, оставим 100-значное число, делящееся на 2^{100}, все цифры которого — единицы или двойки.

340 (Будаев Виктор, 8 класс). Достаточность. Задав 11 вопросов, можем узнать все числа первой строки и одно число второй строки. Обозначим их через $a_1, a_2, \ldots, a_{10}, b_k$. Тогда число b_i, стоящее под a_i, найдем из равенства $b_i = a_i + b_k - a_k$.

Необходимость. Пусть мы задали 10 вопросов. Возможны два случая.

1) В каждом столбце узнали по одному числу. Тогда из четырех любых чисел a, b, c, d (b стоит под a, d — под c) известны лишь 2 числа, поэтому уравнение $a + d = b + c$ содержит 2 неизвестных, значит, имеет бесконечно много решений.

2) В одном из столбцов мы знаем оба числа a и b. Тогда в остальных 9 столбцах мы знаем лишь 8 чисел, значит, в одном из столбцов неизвестны оба числа, для которых поэтому возможны бесконечно много значений.

И в 1) и 2) случае 10 вопросов не хватает для однозначного решения. Следовательно, наименьшее число вопросов равно 11.

341. а) Есть следствие б).

б) (Будаев Виктор, 8 класс). Пусть MN — отрезок, разбивающий многоугольник $ABC \ldots YZ$ на два многоугольника равной площади и равного периметра, точка O — центр вписанной в многоугольник окружности и M лежит на стороне AB, N — на стороне KL. Тогда $MB + BC + \ldots + KN = MA + AZ + \ldots + LN$. Умножим это равенство на $r/2$, где r — радиус вписанной окружности, и, заметив, что $\frac{MB \cdot r}{2} = S_{\triangle MOB}$, $\frac{BC \cdot r}{2} = S_{\triangle BOC}$ и т. д., получим

$$S_{\triangle MBO} + S_{\triangle BOC} + \ldots = S_{\triangle MOA} + S_{\triangle AOZ} + \ldots$$

Вычитая из этого равенства равенство $S_{MBC \ldots KL} = S_{MAZ \ldots N}$, получим $S_{\triangle MON} = -S_{\triangle MON}$, или $S_{\triangle MON} = 0$, значит, точка O лежит на MN, т. е. MN проходит через O.

342 (Будаев Виктор, 8 класс). Доказательство от противного. Предположим, что какие бы 2 числа мы ни выбрали, либо их сумма, либо их разность равна одному из оставшихся. Пусть $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_{25}$. Так как суммы $a_1 + a_{25}$, $a_1 + a_{24}$, $a_1 + a_{23}, \ldots, a_1 + a_2$ больше a_i ($i = 1, \ldots, 25$) и, следовательно, не равны ни одному a_i, то каждая из разностей $a_1 - a_{25}$, $a_1 - a_{24}, \ldots, a_1 - a_2$ равна одному из a_i. Но $a_1 - a_{25} > a_1 - a_{24} > \ldots > a_1 - a_2$ и $a_2 > a_3 > \ldots > a_{25}$, откуда $a_1 - a_{25} = a_2$, $a_1 - a_{24} = a_3, \ldots, a_1 - a_2 = a_{25}$ или $a_2 + a_{25} = a_3 + a_{24} = a_4 + a_{23} = \ldots = a_{25} + a_2 = a_1$. Аналогично $a_2 + a_i > a_2 + a_{25}$ при $3 \leqslant i \leqslant 24$, т. е. суммы $a_2 + a_i$ ($i = 3, \ldots, 24$) не равны ни одному из чисел $a_2, a_3, \ldots, a_{25}$, следовательно, каждая из разностей $a_2 - a_{24}$, $a_2 - a_{23}, \ldots, a_2 - a_3$ равна одному из чисел $a_3, a_4, \ldots, a_{25}$, но $a_2 - a_{24} > a_2 - a_{23} > \ldots > a_2 - a_3$ и $a_3 > a_4 > \ldots > a_{25}$, поэтому разность $a_2 - a_3$ равна либо a_{25}, либо a_{24} (так как разностей 22, а чисел 23).

I. $a_2 - a_3 = a_{24}$, но $a_1 - a_3 = a_{24}$, откуда $a_1 = a_2$, что противоречит условию

II. $a_2 - a_3 = a_{25}$. Тогда либо $a_2 - a_4 = a_{24}$, $a_2 - a_5 = a_{23}$ и т. д., наконец, $a_2 - a_{14} = a_{14}$, т. е. ни сумма $a_2 + a_{14}$, ни разность этих чисел $a_2 - a_{14}$ не равна ни одному из оставшихся; либо для одной из разностей имеем $a_2 - a_i = a_k = a_1 - a_i$, откуда $a_1 = a_2$. Итак, мы приходим в противоречие с условием задачи, следовательно, наше предположение неверно.

343 (Будаев Виктор, 8 класс). Проведем доказательство от противного, например, для пункта а) (пункты б) и в) доказываются аналогично). Очевидно, что менять дважды знаки в той же шестерке все равно, что не менять в ней знаки. Поэтому будем считать, что в каждой шестерке знаки меняем не более одного раза Тогда, если в вершине A_n меняли знаки k раз, то в соседних вершинах A_{n-1} и A_{n+1} знаки меняли либо k, либо $k \pm 1$ раз. Так как в вершинах $A_3, A_4, \ldots, A_{12}$ меняли знаки четное число раз, а в вершинах A_1, A_2 — нечетное, то в вершинах $A_3, A_4, \ldots, A_{12}$ знаки меняли $2m$ раз, а в вершинах A_1, A_2 — $2m \pm 1$ раз. Всего же было изменено $10 \cdot 2m + 2(2m \pm 1) = 24m \pm 2$ знаков, но это число не делится на 6 (и на 4 и на 3).

344 (Будаев Виктор, 9 класс). По условию $a^m + 1$ делится на $a^n + 1$. Так как число $a^m + a^{m-n} = a^{m-n}(a^n + 1)$ делится на $a^n + 1$, то и разность $(a^m + a^{m-n}) - (a^m + 1) = a^{m-n} - 1$ делится на $a^n + 1$. Если $a^{m-n} - 1 = 0$, то $m = n$, значит, m делится на n, что и требовалось доказать. Если же $a^{m-n} - 1 \geqslant a^n + 1$, то из делимости на $a^n + 1$ двух выражений $(a^{m-n} - 1)$ и $(a^{m-n} + a^{m-2n})$ следует, что $a^{m-2n} + 1$ делится на $a^n + 1$. Продолжим этот процесс. Каждый раз будем получать либо $a^{m-kn} - 1 = 0$, т. е. $m = kn$ (и, значит, m делится на n), либо $a^{m-kn} \pm 1 \geqslant a^n + 1$ (откуда или $m - kn = n$ и все доказано, или $m - kn > n$ и процесс продолжаем). Так как существует лишь конечное число таких k, для которых $m \geqslant (k+1)n$, то дойдем до такого k_0, что $a^{m-k_0 n} - 1 = 0$, тогда $m = k_0 n$, т. е. m делится на n.

345 (Будаев Виктор, 9 класс). Предположим, что существуют строки с одинаковыми числами. Рассмотрим верхнюю из таких строк, в ней $N = M$. Начнем двигаться от чисел N и M вверх по строкам. На каждом шаге из числа либо извлекается корень квадратный, либо вычитается единица. Очевидно, вначале над N и M проделали разные операции (иначе в предыдущей строке стояли бы равные числа). Итак, над N и M стоят числа n и m такие, что $n + 1 = m^2$. На следующем шаге из n не может извлекаться квадратный корень: ведь $n + 1$ — полный квадрат, следовательно, n не является полным квадратом. Значит, из n вычитается единица. Аналогично из $n - 1$ тоже вычитается единица, и вообще $m^2 - (m-1)^2 - 1 = 2m - 2$ шагов подряд вычиталась единица. Если за эти $2m - 2$ шагов мы не дойдем до верхней строки таблицы, то n стоит не ранее, чем в $(2m-2)$-й строке. Число m стоит в строке, номер которой не больше $m - 2$; так как n и m стоят в одной строке, то $2m - 2 \leqslant m - 2$, что заведомо неверно. Если же за $2m - 2$ шага мы дойдем до верха таблицы, то n — самое правое число строки, поэтому оно меньше всех остальных чисел этой строки (при получении которых хотя бы один раз возводили в квадрат, а при этом натуральные числа, отличные от единицы, увеличиваются больше, чем на единицу). Значит, $n < m$, что противоречит тому, что $n + 1 = m^2$. Итак, все числа в каждой строке различны.

346 (Будаев Виктор, 9 класс). Занумеруем отрезки по положению их «левых» концов; a_1 — отрезок с самым левым концом и так далее, соответственно левые концы отрезков обозначим через $A_1, A_2, \ldots, A_{50}$. Предположим, что утверждение а) не имеет места, тогда отрезки $a_1, a_2, \ldots, a_8$ не имеют общих точек, поэтому точка A_8 не лежит хотя бы на одном из отрезков $a_1, \ldots, a_7$. Пусть этот отрезок есть a_{k_1}, он лежит левее A_8. Аналогично среди отрезков $a_8, a_9, a_{10}, \ldots, a_{14}$ хотя бы один не содержит точку A_{15}, значит, лежит левее A_{15} и правее A_8; обозначим этот отрезок через a_{k_2}. Аналогично выберем отрезки $a_{k_3}, a_{k_4}, a_{k_5}, a_{k_6}, a_{k_7}$. Эти 7 выбранных отрезков вместе с a_{50} составляют совокупность 8 отрезков, не имеющих попарно общих точек. Итак, если не выполнено условие а), то заведомо выполнено условие б).

347 (Будаев Виктор, 9 класс). Пусть $S_{\max} = a$. Тогда $x \geqslant a$, $\frac{1}{y} \geqslant a$, следовательно, $\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{a}$, $y \leqslant \frac{1}{a}$, т. е. $y + \frac{1}{x} \leqslant \frac{2}{a}$. Но $y + \frac{1}{x} \geqslant a$, откуда $a \leqslant \frac{2}{a}$, т. е. $a \leqslant \sqrt{2}$.

Легко проверить, что при $x = \sqrt{2}$, $y = 1/\sqrt{2}$ получим $S = \sqrt{2}$, следовательно, $a = \sqrt{2}$.

348 (Будаев Виктор, 10 класс). Так как количество закрашенных клеток конечно, то их можно поместить в некоторый квадрат $k \times k$. Докажем, что не более чем через $2k - 1$ перекрашиваний не останется черных клеток. Действительно, после первого перекрашивания верхняя правая клетка квадрата станет белой (так как сверху и справа от нее — белые клетки), а вне квадрата, очевидно, черные клетки появиться не могут. На втором шаге станет белой диагональ из двух клеток, стоящая в правом верхнем углу, и т. д. Итак, при каждом перекрашивании исчезают черные клетки на одной новой диагонали, но попрежнему все черные клетки лежат внутри квадрата. Следовательно, через $2k - 1$ перекрашиваний все черные клетки заведомо исчезнут.

349 (Будаев Виктор, 10 класс). Зафиксируем две точки A и B из четырех заданных. Они могут быть: а) концами одного ребра, б) концами одной диагонали грани, в) концами диагонали параллелепипеда.

Рассмотрим каждый случай.

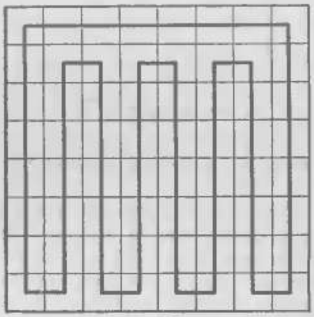
а) 1° Третья точка C лежит в одной грани с A и B. Тогда в этой грани можно построить 2 параллелограмма, для каждого из которых точка D может быть концом любого ребра, выходящего из одной из вершин данной грани к противоположной, значит, всего можно построить 8 параллелепипедов. 2° Ни одна из точек C и D не лежит в одной грани с A и B, тогда они лежат в противоположной грани и $CD \parallel AB$, т. е. A, B, C, D лежат в одной плоскости (в противоречие с условием).

б) AB — диагональ грани. 1° Если C лежит в одной грани с AB, то возможны 4 параллелепипеда. 2° Если C и D не лежат в одной грани с AB, то CD — либо диагональ другой грани, скрещивающаяся с AB (тогда строим единственный параллелепипед), либо ребро (и возможны 4 параллелепипеда).

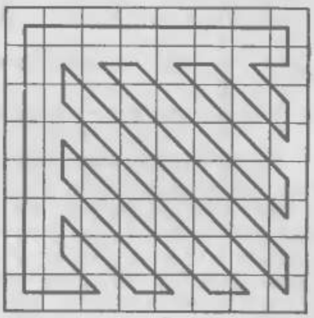
в) AB — диагональ параллелепипеда. Тогда C и D лежат в одной грани либо с A, либо с B, т. е. три из четырех заданных точек лежат в одной грани. Эту грань можно построить тремя способами, а четвертая вершина может лежать на одном ребре с любой из этих трех вершин, поэтому получим $3 \times 4 = 12$ параллелепипедов.

Таким образом, всего имеется $8 + 4 + 1 + 4 + 12 = 29$ различных параллелепипедов.

350. (Будаев Виктор, 10 класс). Наименьший путь равен 64. Действительно, король делает 64 хода, длина каждого из которых либо 1, либо $\sqrt{2}$, следовательно, длина его пути не меньше 64. (Такой путь легко построить, см. рис. A.)



А



Б

Можно построить путь длиной $28 + 36\sqrt{2}$ (см. рис. $Б$).

Докажем, что не существует путь бо́льшей длины. Рассмотрим любой допустимый путь. Выберем такой участок пути от клетки A до клетки B, что а) клетки A и B лежат на границе поля, б) на этом участке пути других граничных клеток нет. Пусть эти клетки не соседние. Тогда путь AB разбивает поле на две части таких, что каждая ломаная, соединяющая клетки из разных частей, пересекает путь AB, откуда следует, что обхода всего поля с таким путем AB не существует. Следовательно, граничные поля A и B — обязательно соседние, т. е. разноцветные, поэтому они соединены отрезком длины 1. Весь путь короля разбивается на 28 таких участков (так как имеется 28 граничных полей), значит, имеется не менее 28 ходов длины 1, т. е. путь короля не длиннее, чем $28 + 36\sqrt{2}$.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. А. Леман, Сборник задач московских математических олимпиад, М., «Просвещение», 1965.
2. Международные математические олимпиады.
3. Д. О. Шклярский, А. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, выпуски 1, 2, 3, М., «Наука», 1950, 1952, 1954 и более поздние.
4. И. М. Яглом и В. Г. Болтянский, Выпуклые фигуры, М., «Наука», 1951.
5. А. М. Яглом и И. М. Яглом, Неэлементарные задачи в элементарном изложении, М., «Наука», 1954.
6. Е. Б. Дынкин и В. А. Успенский, Математические беседы, «Наука», 1952.
7. Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум, М., «Наука», 1973.
8. Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии, М., «Наука», 1974.
9. Е. Б. Дынкин, С. А. Молчанов, А. Л. Розенталь, Математические соревнования (Арифметика и алгебра), М., «Наука», 1970.
10. Н. Б. Васильев, С. А. Молчанов, А. Л. Розенталь, А. П. Савин, Математические соревнования (геометрия), М., «Наука», 1974.
11. С. И. Гельфанд, М. Л. Гервер, А. А. Кириллов, Н. Н. Константинов, А. Г. Кушниренко, Задачи по элементарной математике, М., «Наука», 1965.
12. Е. Б. Дынкин, С. А. Молчанов, А. Л. Розенталь, А. К. Толпыго, Математические задачи, М., «Наука», 1971.

Ирина Леонидовна Бабинская
ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАД

М., 1975 г., 112 стр. с илл.
Редактор *А. Ф. Лапко*
Техн. редактор *Н. В. Кошелева*
Корректоры *З. В. Автонеева, Л. Н. Боровина*

Сдано в набор 21/IV 1975 г. Подписано к печати 9/X 1975 г.
Бумага 84×108$^1/_{32}$, № 1. Физ. печ. л. 3,5. Условн. печ. л. 5,88.
Уч.-изд. л. 6,48. Тираж 590 000 экз. Цена книги 29 коп. Заказ № 698

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома
при Государственном комитете
Совета Министров СССР по делам
издательств, полиграфии и книжной торговли.
198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29

И. Л. БАБИНСКАЯ

ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАД