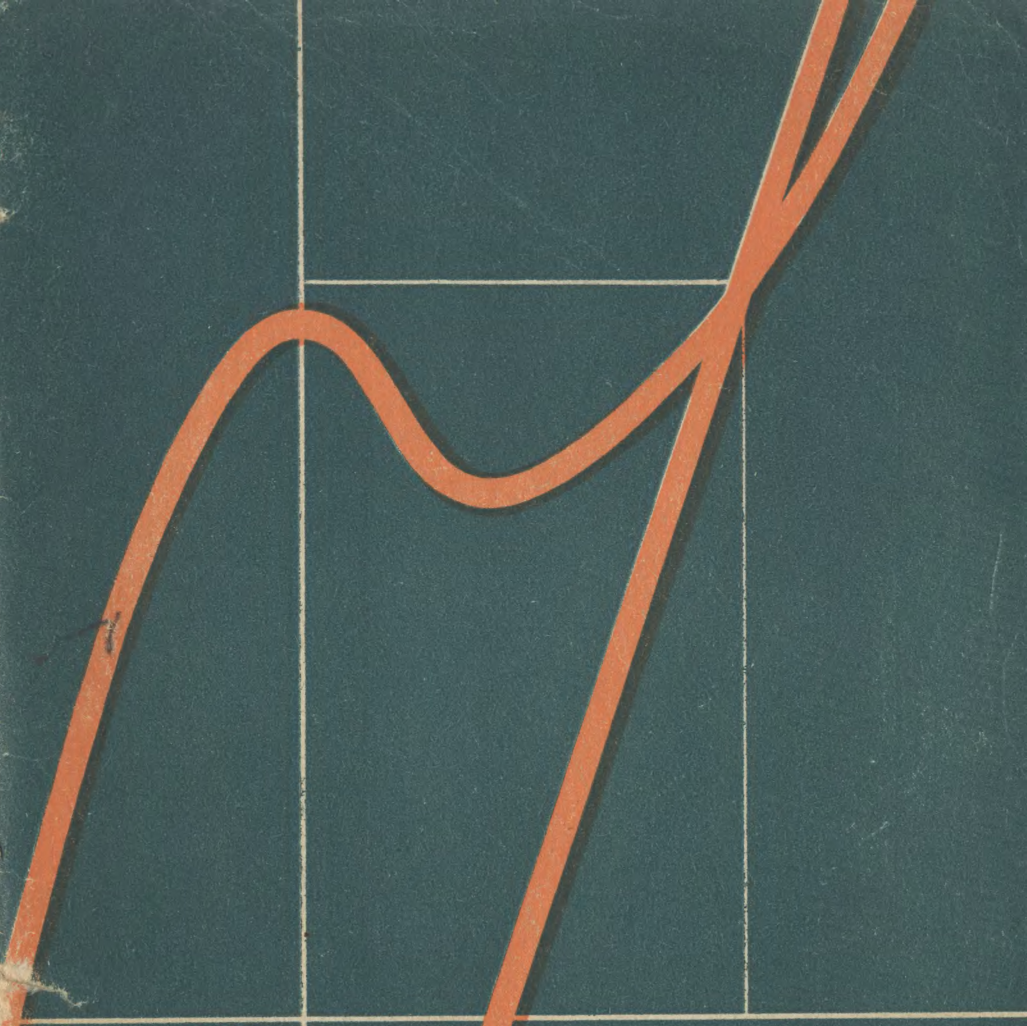


И. С. ПЕТРАКОВ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

И. С. ПЕТРАКОВ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1982

ББК 74.262
П30

Рецензенты:

действительный член Академии наук СССР А. Н. Колмогоров;
учитель математики средней школы г. Ногинска Т. К. Шабашов;
инспектор-методист МП РСФСР К. И. Шалимова

Петраков И. С.

П30 Математические олимпиады школьников: Пособие для учителей. — М.: Просвещение, 1982.—96 с.

Данное пособие написано по результатам многолетнего опыта работы автора. Оно состоит из введения и двух разделов. Во введении дается краткое описание истории олимпиад, излагаются цели и задачи их проведения. В первом разделе раскрываются вопросы проведения олимпиад от школьных до международных, обоснованы принципы отбора материала, приводятся примерные задания для каждого класса. Во втором разделе приведены решения или указания к решению задач, приведенных в пособии.

П $\frac{4306010400-269}{103(03)-82}$ 125—82

ББК 74.262
51

ВВЕДЕНИЕ

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАД

Олимпиады возникли в Древней Греции как состязания в ловкости, силе, красоте. Первая олимпиада состоялась в 776 г. до н. э. Олимпиады проводились в Олимпии один раз в четыре года вплоть до 394 г. н. э., когда были запрещены в связи с распространением христианства. Вновь олимпиады возродились в 1896 г.

Различного рода состязания проводились не только в спорте. Хорошо известна любовь к состязаниям в решении задач как на Руси, так и во многих других странах мира. Математические соревнования по решению задач также называются олимпиадами, хотя они проводятся в настоящее время с периодом не в четыре года, а, как правило, ежегодно.

В России конкурсы по решению задач начали проводиться с 1886 г., в Венгрии и Румынии — с 1894 г., в других странах — значительно позже.

Особенно широкое развитие олимпиады получили в СССР за годы Советской власти. Уже в начале 30-х годов начали работать математические кружки и проводиться олимпиады в Московском и Ленинградском университетах. В 1934 г. была проведена первая математическая олимпиада школьников в Ленинградском университете. Оргкомитет возглавил профессор Б. Н. Делоне. С этого времени олимпиады при ЛГУ проводятся ежегодно. С 1935 г. математические олимпиады проводятся в Московском университете. После Великой Отечественной войны в проведение олимпиад включились многие высшие учебные заведения различных городов страны. Так, с 1947 г. стали регулярно проводиться олимпиады в Вологде, Иванове, Иркутске, Смоленске, с 1949 г. — в Саратове, с 1950 г. — в Белоруссии и ряде других республик нашей страны. Но в большинстве областей и городов олимпиады не проводились.

Олимпиады имеют большое значение при решении ряда вопросов, относящихся к проблеме математического образования в нашей стране. Поэтому Министерство просвещения РСФСР считало, что настало время систематического проведения олимпиад в масштабе всей страны. В 1960 г. была проведена экспериментальная олимпиада. В ней приняли участие команды 9 союзных республик и 13 областей Российской Федерации. С 1961 г. олимпиады в масштабе всей страны стали проводиться регулярно. Они назывались Всероссийскими математическими олимпиадами с участием команд союзных республик. С 1967 г., с года организации Министерства просвещения СССР, их стали называть Всесоюзными олимпиадами.

ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ПРОВЕДЕНИЯ ОЛИМПИАД

Одной из важных целей проведения олимпиад является развитие интереса учащихся к математике, привлечение учащихся к занятиям в математических кружках. У учащихся имеется большое желание проверить свои силы, математические способности, умение решать нестандартные задачи. Их привлекает возможность добровольного участия в соревновании, необычность всей обстановки на олимпиаде.

Для развития интереса учащихся к математике имеет значение и спортивный азарт участников олимпиады. Особенно это характерно для учащихся младших классов. Дух соревнования заложен во многих наших школьниках, поэтому они желают посоревноваться со своими товарищами и в умении решать олимпиадные задачи. В более старших классах, на более высоких ступенях олимпиад, спортивные соображения играют меньшую роль, но игнорировать их совсем не следует.

Олимпиады способствуют выявлению и развитию математических способностей учащихся. Часто на уроках ученик получает, и вполне объективно, только тройки, изредка четверки и двойки. Приходит на школьную олимпиаду попробовать свои силы. Ведь это так интересно! И вдруг мы замечаем, что он неплохо решает задачи «на соображение», задачи с «изюминкой», при решении которых встают в тупик многие отличники. После олимпиады ученик наверняка более серьезно займется математикой. Учитель поможет этому ученику в его занятиях, найдет пути развития математических способностей такого ученика, порекомендует ему математическую литературу, задачи и т. п.

Любой участник олимпиады желает добиться лучших результатов. Для этого он решает задачи, читает рекомендованную литературу, более подробно изучает отдельные вопросы математики, активнее участвует в работе математического кружка. Он понимает, что для успеха на олимпиаде необходимо уметь по-разному решать задачи, развивать в себе способности анализировать решения задач и искать нешаблонные подходы к их решению, видеть неожиданные зависимости. Победа учащегося на каждом этапе приводит к повышению результативности его занятий математикой.

Проведение олимпиад позволяет выявить учащихся, имеющих интерес и склонности к занятиям математикой, что весьма важно для решения вопроса о подготовке большого числа новых математических и научно-методических кадров, столь необходимых стране в век бурного развития науки и техники. При систематическом проведении олимпиад во всех школах, районах, областях, при широком охвате ими учащихся олимпиады являются эффективным средством реализации указанной цели и решения названной задачи.

Перед нашей школой стоит большая задача профориентации учащихся. В решении этой задачи принимают участие все учителя, в том числе и учителя математики. Проведение олимпиад является составной частью этой работы. Участвуя в математических соревнованиях, школьник лучше, более объективно определяет свое отношение к математике как предмету будущей профессии. Есть немало случаев, когда ученик в результате участия в математических олимпиадах начинал с увлечением заниматься математикой или каким-либо ее разделом, а затем выбирал математику или какой-либо вид математической деятельности в качестве своей будущей профессии.

Проведение олимпиад и всей внеклассной работы по математике является прекрасным средством повышения деловой квалификации учителей. Чтобы подготовить учащихся к участию в олимпиадах и проводить олимпиады, учителю математики необходимо вести кружки, проводить большую подготовительную работу, подбирать и решать различные задачи, детально знакомиться с различными вопросами математики, с новинками математической литературы. Подбор материала для кружковых занятий и для олимпиад, подготовка к проведению этих мероприятий являются одной из форм активной работы учителя по повышению своей научно-методической квалификации. Подбор к занятиям математического кружка и к олимпиаде нестандартных, требующих особых приемов решения задач предполагает наличие хороших навыков в этом деле от самого учителя математики. Руководитель кружка тщательно продумывает методику работы над каждой задачей, предлагаемой им кружковцам. На занятиях кружка приходится несколько расширять изучаемый в классе материал курса математики, иногда такое расширение выходит за рамки обязательной программы. Рассмотрение на занятиях кружка таких вопросов неизбежно приводит учителя к необходимости основательного знакомства с этим материалом и с методикой его изложения учащимся.

Проведение олимпиад, руководство математическими кружками дают учителям эстетическое наслаждение. Здесь в свободной обстановке учитель занимается любимым предметом, рассматривает с учащимися наиболее интересные вопросы, да и аудитория здесь более активная и внимательная, чем обычный класс.

Олимпиады подводят итог всей внеклассной работы по математике в каждой школе, районе, области, республике. Школьные и районные олимпиады позволяют сравнить качество математической подготовки и математического развития учащихся, а также состояние преподавания математики в отдельных классах школы, в отдельных школах района. Областные и республиканские олимпиады дают возможность в некоторой степени сравнить состояние математического образования в отдельных областях, краях и республиках страны. Международные олимпиады позволяют сопоставить состояние верхней грани математического образования в средних школах разных стран. Возможность такого сравнения весьма важна в век научно-технической революции, ибо позволяет странам, участвующим в олимпиадах, своевременно принять необходимые меры для устранения пробелов в содержании математического образования школьников, в осуществлении мероприятий по подготовке будущих специалистов в области математики.

ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ПОДГОТОВКИ И ПРОВЕДЕНИЯ ОЛИМПИАД

В нашей стране ежегодно проводятся пять туров олимпиад: школьные, районные, областные (краевые, республиканские АССР), республиканские и всесоюзные олимпиады. Завершаются олимпиады международными математическими олимпиадами. Эта система олимпиад дополняется конкурсами по решению задач, проводимыми отдельными высшими учебными заведениями, телевидением, некоторыми газетами, журналами.

Для успешного проведения олимпиад необходимо выполнение в первую очередь следующих условий: 1) систематическое проведение всей внеклассной работы по математике; 2) обеспечение регулярности проведения олимпиад; 3) серьезная, содержательная и интересная подготовительная работа перед проведением каждой олимпиады; 4) хорошая организация проведения олимпиад; 5) интересное математическое содержание соревнований.

Проведение всех олимпиад предполагает соответствующую подготовку учащихся. Поэтому в каждой школе должны систематически работать кружки по классам или параллелям классов. Кружки более высокого уровня организуются при вузах, а в районах — при математических школах или райметодкабинетах. Также систематически должна проводиться индивидуальная работа с наиболее сильными или вообще интересующимися математикой учащимися.

Для проведения каждого тура математических олимпиад создаются оргкомитет и жюри. Они обеспечивают всю подготовительную работу, предшествующую непосредственному проведению соответствующей олимпиады, обеспечивают подбор заданий для проведения соревнований, проверку работ участников, присуждают призы победителям. Причем, как правило, для проведения школьных олимпиад задания подбирают или составляют сами члены жюри, для проведения районных олимпиад можно использовать и задания, присылаемые областными оргкомитетами, но, естественно, некоторые из них можно заменять заданиями, подготовленными жюри районной олимпиады. Для проведения областных, краевых, республиканских (АССР) олимпиад в основу берутся задания, разработанные республиканским оргкомитетом или центральной методической комиссией по проведению математических олимпиад. Естественно, и областной оргкомитет вправе вносить свои коррективы в комплект заданий республиканского оргкомитета или центральной методкомиссии.

При подборе заданий для проведения каждого тура олимпиад целесообразно придерживаться такого принципа, при котором из 5 задач, предлагаемых каждому участнику олимпиады, примерно 1—2 задачи должны быть посильны для большинства участников олимпиады. На школьных олимпиадах это примерно задачи на уровне наиболее сложных задач текущих контрольных работ. Такие задачи вселяют уверенность в силы большинства участников олимпиады, не отпугивают их от занятий математикой, хотя и не дают права на получение приза. 2—3 задачи даются повышенной трудности. Их может решить не более половины участников. Решившие хотя бы одну из таких задач получают возможность на получение определенного поощрения за успешное участие в олимпиаде. И 1—2 задачи сложные, как говорят, с изюминкой. Эти задачи требуют очень хорошей математической подготовки, более широкого математического кругозора, особой математической смекалки и твердых навыков в решении нестандартных задач. Такие задачи позволяют выявить наиболее способных, наиболее подготовленных по математике учащихся. При этом весьма желательно, чтобы на школьных олимпиадах хоть один ученик из каждой параллели классов получил первый приз. Для проведения школьной олимпиады необходимо подбирать задачи с учетом общего математического развития, качества математической подготовки учащихся соответственно класса или школы. Но занижать уровень задач третьего вида ради обеспечения возможности награждения хоть одного из участников первым призом было бы неверно. Олимпиады в значительной степени объективно характеризуют качество работы учителя с наиболее сильными учащимися. Результаты победителей школьной олимпиады на районной, а победителей районной — на областной позволяют судить об истинном успехе этих учащихся соответственно на школьной и районной олимпиадах, позволяют сравнивать успехи команд различных школ и районов. Олимпиады позволяют вскрыть как серьезные недочеты, так и большие успехи в работе с наиболее сильными, да пожалуй и не только с наиболее сильными учащимися по математике.

Участники районных математических кружков, кружков при вузах, как правило, принимают участие и в школьных олимпиадах и таким образом включаются в общую систему олимпиад. Но они могут и непосредственно по итогам олимпиады данного вуза или районного кружка быть включены в районные или городские олимпиады и таким образом включиться в общую систему олимпиад. Победители телевизионных олимпиад, а также конкурсов по решению задач, проводимых отдельными газетами и журналами, включаются в областные олимпиады и при удачном выступлении на областной олимпиаде включаются в команду области на республиканскую олимпиаду.

Итоги каждого тура олимпиады оформляются в виде решения жюри, в заголовке которого указываются название олимпиады, классы, территория проведения олимпиады. Само содержание состоит из граф: 1) № п/п; 2) фамилия, имя учащегося, школа; 3) число очков, полученное за решение соответствующих задач; 4) всего получено очков; 5) какое присуждено поощрение; 6) какая вынесена рекомендация; 7) фамилия, инициалы учителя.

Итоги подписывают председатель и члены жюри. К итогам прилагаются задачи, предложенные на олимпиаде, список учащихся, направляемых на очередной тур, и их работы на данном туре олимпиады. При направлении учащихся на областную, республиканскую и всесоюзную олимпиады в решении жюри даются краткие сведения об общем охвате математическими олимпиадами каждого тура учащихся данной территории и результаты этих туров.

Математические олимпиады уместно и необходимо использовать для осуществления воспитательной работы со школьниками. С этой целью в содержание соревнований и в подготовительные олимпиадные задачи полезно включать задачи экономического характера, а также задачи, отражающие успехи в развитии современного производства, в развитии технологии местных промышленных и сельскохозяйственных производств. Такие материалы особенно целесообразно использовать на школьных и районных олимпиадах.

ОРГАНИЗАЦИЯ И ПРОВЕДЕНИЕ ОЛИМПИАД

ШКОЛЬНЫЕ ОЛИМПИАДЫ

Школьные олимпиады проводятся с IV по X класс. В этих олимпиадах принимают участие все участники математических кружков и все другие учащиеся, желающие посоревноваться в решении задач, проверить свои силы и математические способности.

Некоторые отличия и специфика проведения олимпиад в разных классах приводят к возможным различиям в содержании и форме проведения олимпиад в разных классах, поэтому в IV—VII классах применимы две формы проведения олимпиад. Одну можно назвать соревнованием команд по решению задач, а другую — конкурсом учащихся по решению задач. В течение года в этих классах целесообразно провести обе олимпиады: одну в середине, а вторую в конце учебного года. Причем в середине учебного года проводится конкурс по решению задач, а в конце учебного года — соревнование команд. В остальных классах проводится одна олимпиада зимой — конкурс по решению задач.

Хотя олимпиады и подводят итоги внеклассной работы с учащимися по математике за истекший период года, тем не менее за 2—3 недели до их проведения целесообразно провести специальную подготовительную работу, содержание и формы которой в значительной степени должны помочь достижению целей проведения олимпиад, обеспечить лучшие результаты соревнований учащихся, привлечь на олимпиаду учащихся, не принимавших участия в работе математических кружков.

Желательно, чтобы родители учащихся заранее знали цели, задачи и время проведения школьных и районных олимпиад. К подготовительной работе, а в отдельных случаях и к проведению олимпиад могут привлекаться родители, особенно работающие в области математической науки.

Для подготовки и проведения олимпиад создаются оргкомитет и жюри. Жюри является частью оргкомитета. Оргкомитет по проведению школьной математической олимпиады составляется из учителей математики школы и актива учащихся разных классов. В больших средних школах может быть создано два оргкомитета: один для проведения олимпиады в IV—VIII классах, другой для проведения олимпиад в IX—X классах.

В жюри по проведению олимпиады в младших и средних классах входят учащиеся старших классов и учителя. Жюри по проведению олимпиады в старших классах составляется из учителей и, если имеется возможность, из преподавателей техникумов, вузов и научно-исследовательских институтов.

За 3—4 недели до проведения олимпиады оргкомитет намечает план подготовительных мероприятий и порядок проведения олимпиады, определяет ответственных за каждое мероприятие. За 2—3 недели до олимпиады вывешиваются красочные объявления об олимпиаде, призывы к учащимся подготовиться и принять участие в олимпиаде, красочно оформленные подготовительные задачи по разным классам и группе классов, рекомендации о том, как готовиться олимпиаде, какие можно использовать книги, к кому обращаться за советами. Оргкомитет составляет расписание консультаций с указанием фамилий людей, проводящих консультации. Это расписание вывешивается вместе с другими подготовительными материалами.

Подготовительные задачи, рекомендации по подготовке к олимпиаде, задания для проведения олимпиады готовят члены жюри. Эти материалы рассматриваются на заседании жюри. Задания обычно подбираются для каждой параллели классов, но отдельные задачи могут быть или близки по условию, или совпадать. Задачи можно подобрать из книг серии «Библиотека физико-математической школы», журналов «Квант» и «Математика в школе», пособий для факультативных занятий, учебников, сборников олимпиадных материалов, а также из книг, предложенных в списке рекомендуемой литературы.

Во время утверждения заданий для проведения соревнований по каждому классу жюри определяет и утверждает число очков за правильное решение каждого задания, определяет число очков, которое снижается за выполнение каждого задания при наличии в его решении тех или иных недочетов, а также число очков, которое может быть иногда поставлено за оригинальное обоснование или особо рациональные преобразования. Жюри утверждает весь порядок проверки работ участников олимпиады и порядок подведения итогов соревнований и олимпиады в целом. Как правило, члены жюри распределяются по классам. Группа членов жюри по соответствующим классам проверяет работы учащихся этих классов, подводит общие итоги соревнований учащихся, докладывает результаты соревнований на общем заседании жюри. У членов жюри по классам могут возникнуть разногласия в оценках отдельных работ. Эти работы и их оценки рассматриваются на общем заседании жюри.

Результаты олимпиады оформляются в виде решения оргкомитета или жюри, утвержденного приказом директора школы. Результаты олимпиады доводятся до сведения всех учащихся школы и заносятся в личное дело каждого ученика, успешно выступившего на олимпиаде. По окончании учебного года эти успехи отмечаются в характеристиках учащихся.

На школьных олимпиадах целесообразно установить три степени поощрения. Их можно назвать первой, второй и третьей премиями или первым, вторым и третьим местами. Если есть возможность всем успешно прошедшим олимпиаду вручить премии, то тогда естественно поощрения назвать премиями. Причем в качестве премий лучше всего давать математические книги. Обычно в школе на одну премию дают одну книгу. На разные премии вручаются разные книги. На каждой книге делаются соответствующая надпись, подпись директора школы и председателя оргкомитета, на подписях ставится гербовая печать школы.

Если школа не имеет материальных возможностей для приобретения премий, то итоги олимпиады можно подвести, определив успехи каждого участника как первое, второе и третье места на олимпиаде. Тогда участники получают грамоты с соответствующей записью. Грамоты целесообразно вручать и при награждении книгами.

Средства для премирования победителей и других мероприятий по проведению олимпиады выделяются из фондов школы, общественных организаций школы, от шефских организаций и из других источников.

Олимпиада проводится в торжественной обстановке. Для проведения школьной олимпиады в больших школах целесообразно выделить 2—3 дня. В первый день провести олимпиаду IV—VI классов, во второй — VII—VIII и в третий — IX—X классов. В небольших школах можно провести олимпиаду в 1—2 дня. В первый день провести олимпиаду, например, для IV—VII классов, а во второй — для VIII—X классов.

В младших и средних классах школы целесообразно подготовить к олимпиаде выставку математического творчества учащихся. Для этого в начале учебного года все учителя математики, совет дружины и комитет комсомола школы делают соответствующие объявления в каждом классе. В период непосредственной подготовки к олимпиаде вывешиваются призывы и рекомендации о подготовке к выставке математического творчества учащихся. Во многих школах на выставку поступают пособия, изготовленные учащимися в период от предыдущей олимпиады до олимпиады этого года. На выставке могут быть модели различных фигур, изготовленные учащимися для иллюстрации математических понятий, теорем, формул, изучаемых в курсе математики, модели, раскрывающие смысл той или иной задачи и принцип ее решения. Могут быть представлены и математические работы учащихся: решения задач, различные доклады на математические темы, наиболее интересные задачи, составленные самими учащимися, и т. п. материалы. Все материалы, представляемые на выставку, должны быть в возможно более изящном оформлении и иметь определенное математическое содержание, математический смысл. Математическое содержание может быть различным, в более старших классах оно более глубоко. В выставке могут участвовать учащиеся всех классов.

Итоги участия школьников в выставке оцениваются жюри олимпиады. Победители награждаются призами или грамотами и отмечаются в приказе директора школы. По окончании олимпиады материалы выставки будут прекрасным пополнением кабинетов математики школы.

Олимпиады учащихся четвертых классов

Олимпиада в четвертых классах является первым опытом участия детей в подобного рода соревнованиях. Поэтому целесообразно выделить подготовительные мероприятия по четвертым классам отдельно. Детям будет легче в них разобраться, понять призывы и найти нужные тренировочные задачи. В более занимательной и красочной форме вывешиваются объявление об олимпиаде и призыв к учащимся четвертых классов принять участие в олимпиаде. Здесь же советы о том, как готовиться к олимпиаде. Выпускается отдельный бюллетень подготовительных задач. Подготовительные задачи можно взять из книг [1], [2], [9], [10], [18], [21], [25], [27], [29]. Все эти материалы вывешиваются в школе на видном месте, вблизи классных комнат учащихся четвертых классов, отдельно от материалов для других классов.

Конкурс по решению задач. Соревнования нужно организовать так и подобрать такие задачи, чтобы олимпиада вызвала у детей интерес и желание еще участвовать в подобного рода соревнованиях. Поэтому задачи для IV класса целесообразно подбирать по тематике более близкие к программному материалу, к тематике тех задач, которые дети решали в течение учебного года в классе. Но в задачах должен быть и элемент занимательности, новизны, оригинальности и своеобразия.

На соревнованиях создается непринужденная обстановка, при которой дети чувствуют товарищеское понимание и внимательное отношение со стороны членов жюри. При выполнении заданий от учащихся нецелесообразно требовать столь же безукоризненного оформления решений задач, как на обычной контрольной работе. Детям сообщается, что жюри оценивает и точность решения, и красоту рисунков, и последовательность записей решения, преобразований, но главное в выполнении работы на олимпиаде — это мысль ученика, правильное решение, рациональные преобразования. Надо искать в решении оригинальные, необычные математические рассуждения, зерна собственной математической мысли ученика. Они ценнее всяких красивых оформлений.

Все участники олимпиады четвертых классов располагаются в одной классной комнате. Каждый ученик сидит один за столом или партой. В случае большого количества участников может быть выделено для четвертых классов 2—3 классные комнаты. На комнатах написано, олимпиада какого класса в ней проводится. Для большей организованности и торжественности перед началом олимпиады ее участники строятся на линейку. После приветствия директора школы участники расходятся по своим классным комнатам.

Оргкомитет заранее доводит до сведения участников олимпиады, какие принадлежности они должны принести с собой, а какие будут подготовлены организаторами олимпиады (бумага, карандаши, линейки, циркули).

Условия задач выписываются на доске до прихода в класс участников олимпиады. На выполнение задания отводится 1,5—2 урока, с тем чтобы дети не спешили, выполняли задания спокойно.

В классе при выполнении работы участниками олимпиады находятся члены жюри по этому классу. По истечении времени, отведенного на выполнение работы, члены жюри собирают работы участников и сразу же приступают к их проверке. В это время в зале школы для участников олимпиады проводится небольшой (на 30—40 мин) концерт самодеятельности или другое аналогичное мероприятие, желательно с математическим содержанием.

После проверки работ участников олимпиады четвертых классов в торжественной обстановке, в присутствии руководства школы, учителей математики, классных руководителей и членов жюри объявляются итоги олимпиады и вручаются награды победителям.

Каждую работу проверяют как минимум два члена жюри: учитель, ученик-старшеклассник и возможно один из учителей математики старших классов.

На следующий день итоги олимпиады полезно оформить в виде решения оргкомитета и жюри, утвержденного директором школы. Красочно оформленное решение оргкомитет вывешивает на видном месте в коридоре школы.

Примерные задания для проведения зимней олимпиады (конкурс по решению задач).

1. Выполни действия:

а) (257 368 + 2573) + (42 632 — 1573);

б) 354 · 73 + 23 · 25 + 354 · 27 + 17 · 25.

2. Найди пропущенные цифры и объясни, как ты рассуждал:

а)
```
  *5*8
+
 5*3*
 -----
 *0209
```

б)
```
   63
 ×
   **
 ----
   **
  **
 ----
  ***
```

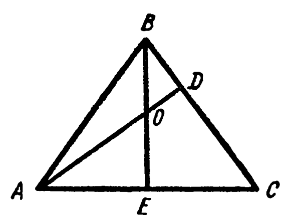


Рис. 1

3. Запиши все отрезки, изображенные на рисунке 1. Сколько получилось всего отрезков?

4. На одной чашке весов лежит 6 одинаковых пачек чая и гиря в 50 г, а на другой чашке весов лежит одна такая же пачка чая, гиря в 100 г и гиря в 200 г. Весы находятся в равновесии. Определи, сколько граммов весит одна пачка чая.

5. По прямой дороге от колхоза *А* до города *М* расположено последовательно 4 села: *Б*, *В*, *Г*, *Д*. Расстояние от *А* до *В* равно 15 км, от *А* до *Д* — 50 км, от *Г* до *Б* — 20 км, от *Г* до *М* — 30 км, а от *В* до *Д* на 5 км меньше, чем от *Д* до *Г*. Найди расстояние между каждой парой населенных пунктов и расстояние от колхоза до города.

Конкурс команд в конце учебного года. Вся подготовительная работа перед конкурсом команд проводится в том же плане и объеме, что и перед зимней олимпиадой. Подготовительные задачи можно брать из тех же пособий. В олимпиаде учитываются результаты как командного, так и личного первенства учащихся.

В день проведения олимпиады перед ее началом участники олимпиады выстраиваются на торжественную линейку по командам отдельных классов. Каждая команда составляется из учащихся одного класса. Если число участников от класса больше 12, то их целесообразно разбить на 2 или даже 3 команды. Директор школы или его заместитель по учебной работе обращается к участникам с пожеланием успехов на олимпиаде, затем председатель оргкомитета сообщает участникам порядок проведения олимпиады. Для каждой параллели классов отводится 5—6 комнат. Команды по очереди обходят все комнаты. На классных комнатах надписи типа «Умеешь ли ты быстро считать», «Здесь выполняют операции над множествами», «Преобразования». На комнате может быть и просто небольшой плакат с изображением графиков функций, треугольников или других геометрических фигур. Это означает, что в данной комнате учащиеся выполняют задания на построение графиков или другие операции с графиками и соответственно построение треугольников или какие-то операции над треугольниками или другими изображенными геометрическими фигурами.

Команда входит в классную комнату, и все члены команды садятся за столы, на которых подготовлены все принадлежности для выполнения задания, условие которого написано на доске. Обычно в каждой комнате дается один вариант задания, а учащиеся садятся по одному за каждый стол или даже по одному через один стол. В исключительных случаях допустимо, чтобы учащиеся приносили с собой принадлежности, необходимые для выполнения заданий.

В течение 5—8 мин (в каждой комнате время строго фиксировано, оно заранее определено жюри) учащиеся выполняют задания. В комнате присутствуют два члена жюри или один член жюри и один член оргкомитета — старшеклассник. По команде члена жюри все учащиеся заканчивают работу, сдают листочки члену жюри и переходят в следующий класс. Член жюри сразу же приступает к оценке работ и выставлению оценок в список команды. Он успевает это сделать, пока происходит смена команд и идет работа очередной команды.

Когда каждая команда обойдет все комнаты, подготовленные для данного класса, жюри подводит итоги олимпиады по этому классу. На подведение итогов по классу обычно требуется 15—20 мин. Чтобы не затягивать подведение итогов, эти итоги сначала рассматриваются отдельно по каждому классу теми членами жюри, которые проводили соревнования в этом классе. На общем заседании жюри только утверждаются итоги и определяются награды каждой команде и участникам.

Во время работы жюри по подведению итогов олимпиады в зале школы для участников обычно дается небольшой концерт самодеятельности или организуются другие интересные мероприятия. Затем в торжественной обстановке сообщаются итоги олимпиады и вручаются награды победителям. В качестве наград учащимся обычно вручаются математические книги, грамоты, объявляется благодарность приказом директора по школе. Результаты команд определяются как суммарное число очков всех членов команды. Обычно командам-победителям вручаются памятные вымпелы или грамоты за призовые места на школьной олимпиаде соответствующих классов.

Примерные задания для проведения конкурса команд.

6. Какие из данных тебе фигур конгруэнтны? Напиши их названия и количество конгруэнтных фигур каждого вида. Как ты узнал, что эти фигуры конгруэнтны? Измерь длины сторон одной из данных фигур, запиши их и вычисли периметр этой фигуры.

(На столе для каждого ученика подготовлены 3—4 треугольника, 2 из них конгруэнтны. 3—4 прямоугольника, 2—3 из них конгруэнтны. Один пятиугольник. На столе приготовлены и масштабные линейки.)

7. Гусеница ползет по стволу яблони. За первый час она поднялась на 10 см, за второй час опустилась на 4 см, за третий час вновь поднялась на 10 см, а за четвертый опустилась на 4 см. Так она продолжала подниматься и опускаться в течение нескольких часов. На сколько сантиметров поднимется гусеница за 11 ч?

8. Мальчик нарисовал 5 лучей с началом в точке O (рис. 2). Сколько всего получилось острых углов? Запиши это множество углов, перечислив все углы.

9. Найди пропущенные цифры, обозначенные звездочками, и объясни, как ты рассуждал:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 785 \\ *** \end{array} \\ \hline *** \\ 1*** \\ *** \\ \hline ***** \end{array}$$

10. Мать поручила детям — брату и сестре — разложить пакет конфет так, чтобы на завтра к обеду для гостей было оставлено половина всех конфет и еще 3 штуки, к завтраку для всей своей семьи — половина оставшихся конфет и еще 3 штуки и к вечернему чаю — половина ос-

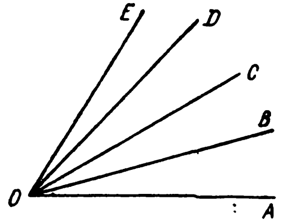


Рис. 2

тавшихся конфет и еще 3 штуки. Дети разложили конфеты в 3 вазы так, как велела мать и у них осталось еще 4 конфеты, которые им разрешили съесть самим. Сколько всего конфет было в пакете?

Олимпиады учащихся пятых классов

Многие учащиеся пятых классов уже принимали участие в олимпиадах, но некоторые будут участвовать впервые. Пятиклассники способны лучше разобраться в задачах и советах, которые им даются в подготовительных материалах. Они способны сами выполнять тренировочные упражнения, которые даются в бюллетенях подготовительных задач, в стенгазетах, в книгах, рекомендованных для подготовки к олимпиаде. Поэтому в бюллетенях можно указывать книги, из которых надо брать учащимся задачи для подготовки к олимпиаде, но при этом целесообразно указывать номера этих задач, так как сами учащиеся еще недостаточно опытны и не сумеют выбрать нужные для тренировки задачи.

Следует иметь в виду, что пятиклассники вообще еще нуждаются в серьезной помощи при подготовке к олимпиаде. Кружковцы такую помощь получают на занятиях математического кружка, а для тех, кто не посещает кружок, но желает участвовать в олимпиаде, надо организовать консультации членов оргкомитета, в основном учителей или специально подготовленных старшеклассников. На такие консультации надо привлекать как можно больше учащихся. Консультацию лучше проводить в виде непринужденной беседы с решением интересных задач и вообще задач тренировочного характера. Решение задач полезно сочетать с интересными короткими рассказами о математике и математиках. Потом можно порекомендовать пришедшим на консультацию порешать подготовительные задачи, напечатанные в бюллетене подготовительных задач к олимпиаде, и некоторые задачи из книг.

Привлечение к таким консультациям старшеклассников служит весьма эффективным средством профориентационной работы. Это поможет учащимся конкретно познакомиться с педагогической профессией, увидеть привлекательность и многогранность педагогической профессии и познакомить их с трудностями, которые встречаются учителю в практической деятельности. И вполне возможно, что некоторые из таких учащихся впоследствии выберут педагогическую профессию и пойдут учиться на физико-математические факультеты педагогических институтов, а в настоящее время это имеет большое народнохозяйственное значение.

Для подготовки к олимпиаде пятиклассникам можно порекомендовать порешать задачи из пособий [5], [7], [11], [18], [19], [20], [21]. Причем целесообразно в этих пособиях выделить некоторые задачи или группы задач. Для бюллетеней материал можно брать из этих же пособий и из дидактического материала для V класса. Характер переработки задач из дидактического материала виден на примере олимпиадных задач данного сборника.

Конкурс по решению задач. Так как олимпиада пятых классов проводится в один день с олимпиадой IV—VI классов, то для проведения соревнований из общего жюри выделяется группа для проведения соревнований в пятых классах. Эта группа готовит задачи, проводит соревнования, проверяет и оценивает работы, вносит рекомендации для награждения победителей олимпиады пятых классов.

Вся организация соревнований в пятых классах аналогична организации соревнований учащихся четвертых классов.

Примерные задания для проведения зимней олимпиады (конкурс по решению задач).

11. От города A до города B поезд шел 16 ч. Обратный путь этот поезд прошел со скоростью на 20 км в час большей и поэтому прошел весь путь на 4 ч быстрее. С какой скоростью шел поезд от A до B и чему равно расстояние от A до B?

12. Реши уравнение $|2x| \cdot |-3,5| = |-28|$.

13. В пионерский лагерь приехали три друга: Миша, Володя и Петя. Известно, что каждый из них имеет одну из фамилий: Иванов, Семенов, Герасимов. Миша не Герасимов. Отец Володи инженер. Володя учится в VI классе. Пионер с фамилией Герасимов учится в V классе. Отец пионера с фамилией Иванов — слесарь. Какая фамилия у каждого из трех пионеров?

14. Запиши число 100 девятью различными цифрами, соединенными знаками действий.

15. У колхозника было несколько одинакового веса поросят и несколько ягнят также одинакового веса. Пионер спросил колхозника, сколько весит один поросенок и один ягненок. Колхозник ответил, что 3 поросенка и 2 ягненка весят 22 кг, а 2 поросенка и 3 ягненка весят 23 кг. Как узнать, сколько весит один поросенок и сколько весит один ягненок?

Соревнования команд в конце учебного года. В V—VI классах число участников каждой команды на соревнованиях в конце учебного года может быть более значительным, чем в четвертых классах. Поэтому задания целесообразно готовить не в одном-двух вариантах, а в большем числе. Некоторые задания могут носить индивидуальный характер. Для ускорения проверки выполнения заданий всеми членами команды на каждом столе задания готовят под своим номером, а у члена жюри, проверяющего эти задания, должна быть тетрадь с краткими решениями этих заданий. В такой тетради решения заданий даются без подробных выкладок и без пояснений, а к некоторым заданиям даются только ответы без записи решений. Участники же олимпиады излагают кратко в своих работах весь ход преобразований или решения задачи, все результаты измерений и вычислений соответствующих величин.

Примерные задания для проведения конкурса команд.

16. Найди наиболее рациональным способом значения выражений:

а) $25\frac{3}{7}\cdot 7+\left(12\frac{23}{25}-4\frac{2}{5}\right)\cdot 25+125\times$
$\times\ 357\cdot 0{,}008,$

б) $16{,}4\cdot 25-\frac{5}{8}\cdot\left(-9\frac{3}{5}\right)-(-2{,}5)\times$
$\times\ 15{,}6-9{,}6\cdot\frac{5}{8}.$

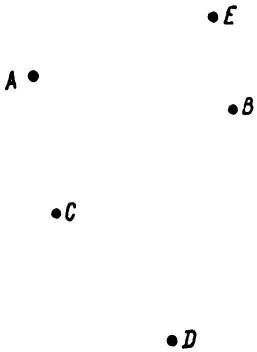


Рис. 3

Рис. 4

17. а) Не выполняя деления, докажи, что число 7920 делится на 60.

б) Не находя наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя чисел 360 и 84, определи, во сколько раз наименьшее общее кратное этих чисел больше их наибольшего общего делителя. Как ты это определяешь?

18. а) Проиллюстрируй основное свойство дроби с помощью рисунка. (Для выполнения этого задания на каждом столе должно быть подготовлено: бумага, цветные карандаши, масштабная линейка, транспортир, циркуль.)

б) Приведи 2—3 примера дробей или дробных чисел, встречающихся в жизни людей.

19. а) Построй треугольник, конгруэнтный данному. (На листе бумаги нарисован в произвольном положении треугольник. На столах подготовлены линейки, угольники.)

б) Построй прямоугольник, конгруэнтный данному. (На листе клетчатой бумаги нарисован прямоугольник в повернутом относительно края листа положении. На столе имеются чертежные принадлежности.)

20. а) Точки A и B симметричны относительно некоторой оси MN (рис. 3). Построй ось симметрии MN точек A и B и точки, симметричные относительно этой оси точкам C, D, E.

б) С помощью циркуля и линейки построй квадрат со стороной AB (рис. 4).

Олимпиады учащихся шестых классов

Обе олимпиады шестых классов отличаются от олимпиад пятых классов в основном своим содержанием. В шестых классах начинается систематическое изучение курсов алгебры и геометрии. Но за полгода перед зимней олимпиадой учащиеся еще незначительно продвинутся в этих дисциплинах вперед. Поэтому при проведении зимней олимпиады в значительной степени приходится опираться на знания, полученные учащимися в предшествующий период обучения, и на материалы кружковых занятий.

При подготовке к олимпиаде можно использовать пособия: [4], [6], [7], [9], [16], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [30].

Примерные задания для проведения зимней олимпиады (конкурса по решению задач).

21. Из корзины яиц взяли половину всего количества яиц, потом еще половину остатка, затем половину нового остатка и, наконец, половину следующего остатка. После этого в корзине осталось 10 яиц. Сколько яиц было в корзине первоначально?

22. При сложении четырех чисел из-за нечеткой записи их в первом числе в разряде сотен цифра 2 была принята за 5, во втором числе в разряде тысяч цифра 3 принята за 8, в третьем числе в разряде единиц цифра 9 принята за 2 и в четвертом числе в разряде десятков цифра 7 принята за 4. В результате сложения получили 28 975. Найди ошибку результата и верную сумму.

23. Реши уравнение $(2x - 5) \cdot \left(\frac{3}{2}x + 9\right) \cdot (0,3x - 12) = 0$.

24. Вычисли значение выражения $\frac{27^3 \cdot 4^5}{6^8} - \frac{5^5 \cdot 2^4}{10^4} - \frac{2^6 \cdot 3^4}{6^4}$.

25. В приведенных примерах указаны действия с однозначными числами, обозначенными буквами. Причем одинаковыми буквами обозначены одинаковые числа, разными буквами — разные числа. Найди эти числа и запиши, как ты при этом рассуждал:

$$\begin{array}{c} \underline{a} \cdot a = \underline{б} \\ в \cdot и = г \\ \hline е \cdot а = а \end{array}$$

Олимпиада в конце учебного года проводится по существу по всему материалу программы курса математики VI класса, включая материал по геометрии. Но учитывая специфику ее проведения (соревнования команд) и ограниченность времени, отводимого на выполнение каждого задания, необходимо подбирать задания более практического характера, в основном проверяющие навыки выполнения различных преобразований и решения геометрических задач. Естественно, задачи на смекалку должны иметь место и в этих заданиях. Но в данных соревнованиях нет возможности дать учащимся задачи, требующие значительного времени для своего решения, дать задачи, требующие логического обоснования или сравнительно сложных рассуждений. Эта форма соревнования дает возможность для привлечения значительно большего числа участников, чем при проведении обычной олимпиады. Соревнования команд проходят при большой активности школьников. Они вызывают интерес подавляющего числа учащихся соответствующих классов. Для подготовки к соревнованиям можно использовать те же пособия, что и при подготовке к зимней олимпиаде шестых классов.

Примерные задания для проведения конкурса команд.

Умеешь ли ты считать?

26. Найди значение выражения:

а) $\left(\frac{810}{162} + \frac{675}{225}\right) \cdot \left(\frac{810}{162} - \frac{675}{225}\right)$, б) $32 \cdot 0{,}99 \cdot 25 \cdot 1{,}25 + 57 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 25 \cdot \frac{4}{19}$.

Внимание и смекалка!

27. а) В одной семье было два брата, у каждого из них было по две сестры и по одному отцу. У каждой сестры было по одной матери. Сколько всего человек было в семье?

б) Из спичек составили пример VI—IV=XI. Переложи только одну спичку, чтобы решение примера стало верным.

Умеешь ли ты решать уравнения?

28. Найди x и y, если:

а) $\begin{cases} 27x + 35y = 151 \\ 5x - 7y = 1, \end{cases}$

б) $15x - 41 + 2x = 9 + 15x + 20 - 5x$.

Умеешь ли ты строить графики?

29. Построй графики уравнений:

а) $2y = 3x + 6$,
б) $3y + 4x = 12$.

Знай формулы!

30. а) Разложи на множители $81a^{20}x^{16} - 16b^{8}y^{20}$.

б) Выполни действия и разложи на множители

$$(2a + 3b)^3 - 18ab\,(2a + 3b).$$

Знаешь ли ты геометрию?

31. а) Построй фигуру, конгруэнтную данной. (На листе бумаги начерчен треугольник или четырехугольник. На столе приготовлены угольник, линейка, циркуль. Ученик выбирает по своему усмотрению способ построения конгруэнтной фигуры.)

б) Из данных фигур выбери параллелограмм. (На столе приготовлены модели треугольников, параллелограммов, четырехугольников произвольного вида. Фигуры обозначены номерами.) Запиши номер выбранной фигуры. По каким признакам ты определил, что это параллелограмм?

в) Выбери конгруэнтные треугольники. Почему ты считаешь, что эти треугольники конгруэнтны? (На столе набор моделей различных треугольников, обозначенных номерами. Среди них есть конгруэнтные и неконгруэнтные.)

Для проведения соревнований команд можно из приведенных шести заданий выбрать пять. Причем в каждом задании можно оставить только одну задачу, если состав учащихся не очень сильный. Приведенные задачи являются только рекомендательным ориентиром для жюри. Они помогут определить характер и трудность подбираемых заданий. Конкретные задания составляет жюри.

Олимпиады учащихся седьмых классов

В седьмых классах проводится зимняя олимпиада и конкурс команд по решению задач в конце учебного года. Причем если в шестых классах на зимней олимпиаде задачи геометрического содержания не предлагались, то в седьмых классах учащиеся накопили достаточные знания по геометрии и поэтому в содержание соревнований целесообразно включать и задачи с геометрическим содержанием.

В седьмых классах появились значительно большие возможности для геометрического моделирования. Поэтому необходимо привлечь учащихся к более активному участию в подготовке к выставке математического творчества учащихся, для чего надо проводить активную работу с учащимися по изготовлению моделей по всем изучаемым вопросам курса геометрии. Для этого целесообразно провести хотя бы несколько занятий математического кружка по моделированию, после этого учащиеся и сами будут хорошо готовить модели. Надо будет только поддерживать их инициативу, а представление моделей на выставку-конкурс является для учащихся хорошим стимулом к активной работе по моделированию. В моделировании могут участвовать все учащиеся, в том числе и не очень сильные по математике. Все могут получить поощрение за хорошие модели. Наряду с геометрическими моделями на выставку могут быть представлены и другие материалы.

Оргкомитет по седьмым классам оформляет бюллетень тренировочных заданий, конкурсы по решению задач в стенной печати, бюллетени с рекомендациями о том, как готовиться к олимпиаде, проводит другие подготовительные мероприятия по всем седьмым классам школы и в каждом отдельном классе. Самое непосредственное участие во всей этой работе принимают все учителя математики, работающие в седьмых классах.

При подготовке к олимпиаде можно использовать пособия: [5], [6], [7], [8], [9], [10], [12], [13], [15], [16], [18], [22], [23], [24], [31].

Примерные задания для проведения зимней олимпиады (конкурс по решению задач).

32. Реши уравнение

$$\frac{11}{5x-5}+\frac{x+3}{x^2-2x+1}=\frac{7x+6}{5x^2-10x+5}-\frac{5}{2-2x}.$$

33. Докажи, что для любого $k \in Q$ верно неравенство

$$(k^2+1)+\frac{1}{k^2+1}\geqslant 2.$$

34. Построй ромб, в котором высота равна 5 см, а одна из диагоналей равна 6 см.

35. Что больше: 99^{20} или 9999^{10}? Объясни почему.

36. В данном примере восстанови цифры, обозначенные звездочками:

$$\begin{array}{r} *8* \\ \times\ 4*2 \\ \hline 7** \\ 3** \\ **** \\ \hline *****0 \end{array}$$

и опиши, как ты при этом рассуждал.

Конкурс команд в конце учебного года может быть проведен так же, как и в IV—VI классах. При подготовке к конкурсу можно использовать литературу, указанную для подготовки к зимней олимпиаде. В содержание включаются вопросы всей программы по математике седьмого класса.

Примерные задания для проведения конкурса команд.

Как легко и быстро вычислить?

37. Вычисли:

а) $\dfrac{4^6 \cdot 9^5 + 6^9 \cdot 120}{8^4 \cdot 3^{12} - 6^{11}}$, б) $\dfrac{437^2 - 363^2}{537^2 - 463^2}$.

Умеешь ли ты раскладывать многочлены на множители?

38. Сократи дроби:

а) $\dfrac{a^2 - 6a + 8}{a^2 - a - 12}$, б) $\dfrac{x^4 - x^2 - 2x - 1}{x^4 - 3x^2 + 1}$.

Знаешь ли ты графики функций?

39. Реши графически систему уравнений

$$\begin{cases} 2y + 4x = x^2 \\ y - x = 0. \end{cases}$$

40. Реши неравенство $(x + 3)(x - 1)(x - 4) > 0$.

Строй, вычисляй, преобразовывай геометрические фигуры.

41. Построй квадрат, равновеликий прямоугольнику, длины сторон которого ты можешь измерить циркулем. (На приготовленном для выполнения работы листе бумаги начерчен данный прямоугольник.)

42. Построй треугольник по данной высоте, углу при основании и медиане, проведенной из этого угла. (На приготовленном для выполнения работы листе бумаги начерчены данные элементы.)

43. Построй треугольник по углу при основании, отношению высоты к основанию, равному $2:3$, и медиане, проведенной из данного угла. (На приготовленном для работы листе бумаги начерчены все данные элементы.)

В зависимости от состава участников олимпиады число приведенных заданий можно несколько изменить, выбрав для проведения соревнований 5 примеров. Из этих заданий можно исключить один алгебраический пример и одну геометрическую задачу, в задание 39 можно включить и аналитическое решение системы, в задании 38 можно оставить один пример. За аналитическое решение следует начислять меньшее число очков. Жюри может дать и совершенно иного характера задания. Как обычно, следует учитывать тематику проведенных кружковых занятий и состав учащихся, их математическое развитие, математическую подготовку.

Олимпиады учащихся восьмых классов

В восьмых классах проводится школьная олимпиада зимой. И можно провести в конце учебного года либо математическую викторину, либо КВН, либо конкурс команд по решению задач.

Вся подготовительная работа перед проведением олимпиады проводится по общему плану. При подготовке к олимпиаде в старших классах больше внимания уделяется тренировочным задачам. Поэтому целесообразно организовать конкурс по решению задач, публикуемых в стенной печати.

Содержание соревнований определяется программным материалом курса математики VIII класса и содержанием кружковых занятий с учащимися. Так же как и учащиеся других классов, учащиеся восьмых классов привлекаются к активному участию в подготовке пособий к выставке математического творчества учащихся. Этой работой учащихся руководят учителя математики, помогая учащимся советами в определении вида пособия, которое может изготовить каждый ученик, и в способе изготовления этого пособия.

При проведении подготовительной работы к олимпиаде восьмых классов можно использовать пособия: [5], [6], [7], [8], [9], [12], [13], [15], [18], [31].

Примерные задания для проведения зимней олимпиады (конкурс по решению задач).

44. Решите уравнение $|3x^2 + 5x| = 2$.

45. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2 + xy + y^2 = 19. \end{cases}$

46. Какая фигура на плоскости является решением системы неравенств $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 16 \\ y - x \geqslant 1. \end{cases}$ Объясните почему.

47. Докажите, что

$$(1 + b)(1 + b^2)(1 + b^4)(1 + b^8)\ldots(1 + b^{2^n}) = 1 + b + b^2 + b^3 + \ldots + b^{2^{n+1}-1},$$ где $b \in \boldsymbol{Q}$, $n \in \boldsymbol{N}$, $n \neq 1$.

48. В VIII классе учится 40 человек. Каждый из них изучает не менее одного иностранного языка: английский, немецкий, французский. 34 человека изучают хотя бы один из двух языков: английский, немецкий. 25 человек — хотя бы один из языков: немецкий, французский. 6 человек изучают только немецкий язык. Одновременно два языка — английский и немецкий — изучают на 3 человека больше, чем французский и немецкий языки. Сколько человек изучает каждый из языков и сколько изучает одновременно каждую пару языков?

Восьмые классы близки к старшим классам. Поэтому в них хорошо бы в конце года провести более серьезные соревнования. Но программа курса математики VIII класса, и особенно программа второго полугодия, имеет практическое направление, прикладное содержание. Для этой программы характерным является ознакомительное изложение материала таких функций, как степенная, показательная, логарифмическая, решение только простейших показательных и логарифмических уравнений и неравенств. Учащиеся не знакомятся с более сложными примерами и задачами. Такое же ознакомительное и прикладное направление имеет и курс геометрии VIII класса. Поэтому в восьмых классах можно провести в конце года конкурс команд. Вся подготовительная работа и проведение конкурса осуществляется по такому же плану и в том же порядке, как в более младших классах. В аналогичном плане готовятся и вывешиваются тренировочные задания и все подготовительные материалы. Активно проводится работа по подготовке участия школьников в выставке ученического математического творчества. Содержание конкурса определяется в основном содержанием курса математики VIII класса и содержанием кружковой работы по математике. В более сильных классах может быть проведен конкурс типа олимпиады, т. е. на более сложном математическом материале. В этом случае, естественно, в содержании может быть учтена программа факультативного курса восьмых классов.

Примерные задания для проведения конкурса команд.

Умеешь ли ты вычислять?

49. Вычислите:

а) $\sqrt[12]{81^6 \cdot 0{,}064^4}$, б) $\sqrt[6]{\dfrac{a^4 b^3}{c^2 d^4}}$ при $a = 0{,}027$, $b = 0{,}0625$, $c = 27$, $d = 125$.

50. Вычислите с помощью логарифмической линейки:

а) $\dfrac{246{,}3 \cdot 5{,}97 + 254{,}3}{628{,}4}$, б) $\dfrac{35{,}93^2 \cdot 0{,}027^2 \cdot \sqrt{43{,}53}}{2{,}57 \cdot 63{,}7}$.

(На столах должны быть приготовлены логарифмические линейки.)

Здесь строят графики.

51. Постройте графики функций:

а) $y = \left|\frac{1}{2}x - 3\right|$, б) $y = |x + 2| + |x - 3|$.

Уравнения решают все!

52. Решите уравнения:

а) $4^x + 1 - 2^{x+3} = 2^5$,

б) $\lg x - \lg 3 = \lg (x + 10) - \lg (x - 4) - \lg 2$.

Здесь измеряют и вычисляют площади поверхностей и объемы фигур.

53. Вычислите площадь поверхности и объем данной фигуры, измерив нужные для этого отрезки. (На столе перед учеником лежит модель одной из правильных пирамид — треугольной, четырехугольной или шестиугольной — и необходимые измерительные инструменты.)

Знаешь ли ты основные геометрические истины?

54. а) Основания наклонной призмы — параллелограммы. Докажите, что противоположные боковые грани параллельны.

б) Докажите, что боковое ребро призмы перпендикулярно основанию, если боковые грани — прямоугольники. (Для иллюстрации этой задачи на столе у каждого ученика подготовлены модели соответствующих многогранников. Вершины многогранников обозначены прописными буквами.)

Олимпиады учащихся IX—X классов

В IX—X классах зимняя олимпиада проводится в те же сроки, что и в остальных классах. День соревнований можно выбрать другой, с тем чтобы несколько сократить нагрузку на организаторов олимпиады. Вся подготовительная работа проводится также по единому для всех классов школы плану. Учащиеся IX—X классов активно участвуют и в выставке математического творчества. Основное отличие олимпиады в содержании соревнований. Школьные олимпиады в IX—X классах целесообразно проводить отдельно по каждой параллели классов. Задания для проведения соревнований в основном определяются изученным ко времени проведения олимпиады программным материалом по математике.

Учащиеся IX—X классов в значительной своей массе относятся более серьезно к занятиям математикой, а десятиклассники часто задумываются о своей будущей профессии, о роли математики как в будущей своей учебе, так и в трудовой деятельности, о ее роли в вопросе обеспечения возможности выбора того или иного жизненного пути, особенно о роли математики при поступлении в высшие учебные заведения и в техникумы. Поэтому олимпиада в старших классах характеризуется более серьезным содержанием, повышенной трудностью задач. Вместе с тем следует придерживаться общих принципов, предъявляемых к определению содержания соревнований. Они особенно важны при проведении школьных олимпиад. В конце учебного года в старших классах можно провести соревнования на более высоком математическом уровне, чем в остальных классах. По форме проведения соревнований и по принципам отбора содержания в старших классах в конце года соревнования проводятся так же, как и зимняя олимпиада. Но в целях единства подведения итогов внеклассной работы по математике за год и сравнения успехов каждого класса при подведении итогов целесообразно учитывать результаты как личного, так и командного первенства классов. Причем в команду включаются все учащиеся одного класса, принимающие участие в соревнованиях. Можно рекомендовать число очков команды считать равным числу очков всех ее участников или принять другую систему, при которой за первую премию начисляется 5 очков, за вторую — 3 очка, за третью — 2 очка, за поощрительную — 1 очко, а число очков команды равно числу очков за премии, полученные членами команды. Можно приплюсовать к этому некоторое число очков за массовость участия учащихся какого-либо класса в соревнованиях. В число очков команды включают и очки, полученные учащимися за успешное участие в выставке математического творчества учащихся.

Проведение школьной олимпиады и в конце года позволит учащимся лучше проверить свою подготовку по математике, что особенно интересует десятиклассников. Следует учитывать, что во многих школах в конце года учащиеся очень перегружены и нет возможности провести с ними олимпиаду. В таком случае задачи, приведенные в данном сборнике, могут быть или использованы на заключительных занятиях кружка, или предложены желающим для самостоятельного решения.

При определении содержания соревнований обычно руководствуются материалом, изученным школьниками ко времени проведения олимпиады, содержанием работы математических кружков, а также содержанием материала факультативных занятий по математике.

При подготовке к олимпиадам IX—X классов можно использовать пособия: [2], [3], [14], [17], [26], [27], [28], [31].

Примерные задания для проведения зимней олимпиады девятых классов.

55. С помощью циркуля и линейки постройте отрезок $x = \sqrt{93}$.

56. Найдите предел $\lim\limits_{x \to 2,5} \dfrac{6x^2 - x - 35}{12x^2 - 20x - 25}$.

57. Вычислите сумму бесконечного числа слагаемых, если закон получения каждого последующего члена суммы один и тот же:

$$\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{10} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}(\sqrt{7}+\sqrt{5})} + \frac{6-\sqrt{35}}{2\sqrt{7}+2\sqrt{5}} + \frac{6\sqrt{5}-5\sqrt{7}}{24+4\sqrt{35}} + \ldots$$

58. Тело движется по закону $s(t) = \sqrt{(3t^2 - 4t + 5)^3}$. Какую скорость и какое ускорение оно будет иметь в момент времени $t = 1$; $t = 2$?

59. На ребрах куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ даны три точки: E — на середине ребра AB, K — на середине ребра B_1C_1, P — на середине ребра DD_1. Через точки E, K, P проведите секущую плоскость и вычислите площадь получившегося сечения куба, если ребро куба равно a.

Примерные задания для проведения конкурса команд девятых классов.

60. Найдите уравнение и постройте касательную к графику функции $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 5$ в точке с абсциссой $x = 3$.

61. Решите уравнение $\frac{1 + \cos 2x + \cos 4x}{\sin 2x + \sin 4x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ на множестве его определения.

62. Через центр тяжести основания правильной треугольной пирамиды проведено сечение, параллельное двум скрещивающимся ребрам пирамиды. Вычислите площадь сечения, если сторона основания пирамиды равна a, а боковое ребро равно $2a$.

63. Сколько различных пятизначных чисел, делящихся на 4, можно составить из цифр 1, 2, 3, 5?

64. Пусть A, B, C — конечные множества. Докажите, что численность $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$.

Примерные задания для проведения зимней олимпиады учащихся десятых классов.

65. Решите уравнение $\sin 2x - \sqrt{3}(\sin x - \cos x) - 1 = \cos 2x$.

66. Определите, чему равна площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{2}x^2 + x$ и $y = 1{,}5x + 3$.

67. Докажите, что любая диагональ куба перпендикулярна плоскости, проведенной через концы трех ребер куба, выходящих из той же вершины, что и рассматриваемая диагональ куба.

68. Докажите тождество

$$\frac{\cos\alpha - 2\cos 3\alpha + \cos 5\alpha}{\sin\alpha + 2\sin 3\alpha + \sin 5\alpha} = \operatorname{ctg}(\pi - 3\alpha) \cdot \operatorname{tg}^2\alpha.$$

69. Докажите, что числовое выражение $(2 \cdot 5^7 - 5 \cdot 2^7)^{83} - ((12 \cdot 5^7)^{83} - (5 \cdot 2^7)^{83})$ делится на 83.

Примерные задания для проведения конкурса команд десятых классов.

70. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2xy + yz = 27 \\ 3yz - 2zx = 25 \\ xz - xy = 4. \end{cases}$

71. Решите уравнение $x^2 + 2x + 2\sqrt{x^2 + 2x - 15} = 30$.

72. Около шара описана правильная четырехугольная пирамида с двугранным углом при основании 60° и стороной основания 12 см. Найдите объем пирамиды, вписанной в этот шар и гомотетичной данной.

73. Постройте график функции $y = \frac{3x + 7}{x + 2}$

74. Найдите все действительные и мнимые корни уравнения $x^{12} - 28x^6 + 27 = 0$.

РАЙОННЫЕ ОЛИМПИАДЫ

Районные математические олимпиады являются вторым туром единой системы всесоюзных математических олимпиад. В районной, городской олимпиадах участвуют учащиеся с V по X класс всех школ района или города.

Время между школьными и районными олимпиадами используется для подготовки учащихся к районной олимпиаде. В этот период продолжают активно работать школьные математические кружки, в каждом классе проводятся конкурсы по решению задач, публикуемых в школьной стенной печати, ведется работа по подготовке к районной выставке математического творчества учащихся. Так как районные олимпиады носят массовый характер, то необходимо в подготовительный период поднять математическую активность учащихся, привлекать большинство учащихся к участию в подготовительных мероприятиях к олимпиаде. Всю эту работу организует и осуществляет оргкомитет школьной математической олимпиады, учителя математики школы.

Районная математическая олимпиада проводится под непосредственным руководством роно или гороно. Ответственным за осуществление всех организационных мероприятий обычно назначается районный или городской методический кабинет. Для подготовки и проведения олимпиады создается районный или соответственно городской оргкомитет. Чаще всего его возглавляет председатель районного (городского) объединения учителей математики. В оргкомитет входят наиболее сильные, наиболее авторитетные учителя математики ряда школ, а также преподаватели вузов, научно-исследовательских институтов и техникумов или училищ, имеющихся на территории района или города.

Оргкомитет осуществляет всю подготовительную работу по проведению олимпиады. Он готовит тексты заданий для проведения соревнований, проводит соревнования, проверяет работу участников олимпиады, определяет победителей и присуждает награды победителям, проводит в торжественной обстановке открытие и закрытие олимпиады.

Как правило, областные, краевые, республиканские (АССР) оргкомитеты присылают тексты заданий, которые рекомендуют для проведения районных олимпиад. Районный оргкомитет определяет, какие из присланных заданий целесообразно использовать при проведении олимпиады, а какие нецелесообразно. Критерием являются общие принципы, применяемые к определению содержания соревнований. Уровень сложности и на районной олимпиаде в значительной степени зависит от математической подготовки учащихся школ района. Как уже отмечалось, задачи целесообразно подбирать такие, чтобы примерно половина участников справилась с двумя задачами, а абсолютное большинство решило одну задачу. Включение в содержание одной посильной для большинства участников олимпиады задачи вселяет в учащихся веру в свои силы, возбуждает энтузиазм, пробуждает желание добиться лучших результатов по математике вообще и на математической олимпиаде в частности. Эффект усиливается, если организаторы сумеют удачно провести беседу об участии школьников в олимпиаде, о возможности добиться лучших результатов. Для этого необходимо подготовить соответствующие выступления авторитетных членов жюри и других известных лиц.

Во время олимпиады проводится районная выставка математического творчества учащихся школ района. Выставку проводит под руководством оргкомитета райметодкабинет. Выставка проводится в актовом или спортивном зале одной из школ или в клубе. На выставку от всех школ представляются лучшие пособия, одобренные оргкомитетами школьных математических олимпиад. Ко времени проведения районной олимпиады некоторые учащиеся могут изготовить и новые весьма интересные пособия. Оргкомитеты школьных олимпиад вправе и такие пособия направить на районную выставку. Оргкомитет по проведению районной олимпиады оценивает все представленные на выставку пособия и присуждает за них призы.

Как правило, районная математическая олимпиада проводится в один из воскресных дней. При удобных коммуникациях в районе подведение итогов олимпиады и торжественное закрытие можно провести в следующее воскресенье. В больших районах с не очень удобной коммуникацией чаще всего ученики приезжают в районный центр на два дня. В первый день проводятся соревнования. Во второй день происходит торжественное закрытие олимпиады. В этом случае жюри ускоряет проверку работ.

В день закрытия олимпиады все участники знакомятся с выставкой математического творчества учащихся. С учащимися проводится краткая беседа о роли наглядных пособий в обучении математике, о роли математического творчества учащихся и даются краткие рекомендации по изготовлению пособий по разным разделам математики.

После осмотра выставки и беседы о роли и способах изготовления пособий члены жюри проводят по классам разбор решений олимпиадных задач.

Как показал опыт, нецелесообразно строго ограничивать число участников районной олимпиады. Даже если участники приезжают на олимпиаду в районный центр на два дня, роно заранее устанавливает по заявкам школ число участников олимпиады и может обеспечить их размещение в одном из школьных интернатов или в каком-либо другом помещении.

Закрытие обычно происходит в одном из лучших залов районного центра. На закрытии олимпиады присутствуют руководители роно и других районных организаций. После приветственных выступлений представителей различных районных и производственных организаций победителям вручаются призы. В качестве призов обычно вручаются книги, грамоты. Весьма полезно устанавливать призы от различных организаций и производств района. Эти призы присуждает оргкомитет, но вручают их представители соответствующих организаций или производств. Производство или организация могут и сами определить вид приза. Призы могут вручаться и школе, учащиеся которой показали лучшие результаты на олимпиаде или выставке математического творчества учащихся. Участие в подведении итогов олимпиады представителей производств имеет большое значение в осуществлении профориентационной работы с учащимися школ района. При наличии возможностей полезно организовать хотя бы краткие выступления перед учащимися представителей различных предприятий, расположенных на территории района.

Подготовка, проведение и итоги районной олимпиады должны широко освещаться в районной печати. Эта положительная традиция вошла в практику районной печати по всей нашей стране. Более того, во многих районных газетах регулярно печатаются математические задачи занимательного характера, задачи на математическую смекалку, развивающие интерес и познавательные способности учащихся, способствующие подготовке учащихся к математическим олимпиадам.

Далее приведем примерные тексты задач районной математической олимпиады.

Примерные задания для проведения олимпиады пятых классов.

75. Рационализация процесса производства дала возможность увеличить выпуск изделий цеха в октябре на 20% по сравнению с сентябрем, в ноябре на 5% по сравнению с октябрем и в декабре на 10% по сравнению с ноябрем. В результате в декабре цех выпустил 11 088 изделий. Сколько изделий выпустил цех в ноябре, в октябре, в сентябре?

76. Найди x из выражения

$$4520:\left(225-4\,209\,520:\frac{1\,000\,795+(250+x)\cdot 50}{27}\right)=40.$$

77. На прокорм 6 лошадей и 40 коров ежедневно отпускают 472 кг сена, а на прокорм 12 лошадей и 37 коров ежедневно отпускают 414 кг сена. Сколько потребуется сена при такой же ежедневной норме на прокорм 30 лошадей и 90 коров с 15 октября по 25 марта включительно? (Год невисокосный.)

78. Наименьшее общее кратное двух чисел равно 240, а их наибольший общий делитель равен 8. Найди эти числа, если известно, что меньшее из чисел содержит только один множитель 5, не входящий в большее число.

79. В столовую привезли лимоны и апельсины в 5 ящиках. В каждом ящике были фрукты только одного сорта. В первом ящике было 100 штук фруктов, во втором — 105, в третьем — 110, в четвертом — 115 и в пятом — 130. Когда был израсходован один ящик фруктов, то оказалось, что лимонов осталось в три раза меньше, чем апельсинов. Сколько осталось тех и других фруктов? Как ты рассуждал?

Примерные задания для проведения олимпиады шестых классов.

80. Школа-интернат купила 675 м красного, синего и черного полотна для пошивки пальто. Когда на пошивку детских пальто израсходовали $\frac{1}{2}$ количества красного полотна, $\frac{2}{3}$ синего и $\frac{3}{4}$ черного, то осталось полотна каждого цвета поровну. Сколько метров полотна каждого цвета было куплено?

81. Найди значение выражения $81a^7b^5c^3 + 36a^5b^6c^4 - 135a^6b^4c^5$ при $a = -2$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = -\frac{1}{3}$.

82. Вершины треугольника расположены в точках A (2; 12), B (26; 19) и C (14; 3). Построй этот треугольник и все треугольники, симметричные данному относительно осей координат и начала осей координат. Вычисли длину сторон этих треугольников.

83. Через точку B проведены четыре прямые так, что $(AB) \perp (BD)$, $(BE) \perp (BC)$, и проведена прямая AC, пересекающая данные прямые так, что $|AB| = |BC|$, $(AC) \cap (BD) = D$, $(AC) \cap (BE) = E$. Докажи, что $\triangle ABE \cong \triangle BCD$.

84. Из двух поселков, находящихся на расстоянии 36 км друг от друга, навстречу друг другу вышли два товарища. Первый шел со скоростью 5 км/ч, а второй шел со скоростью 4 км/ч. Одновременно с первым из того же поселка навстречу второму выехал мальчик-велосипедист. Он ехал со скоростью, равной скоростям двух товарищей. Когда он встретил второго товарища, то поприветствовал его и немедленно повернул обратно. Встретив первого, он поприветствовал его и немедленно повернул обратно. И так он ездил между первым и вторым товарищем, пока они не встретились. Сколько километров за это время проехал велосипедист?

Примерные задания для проведения олимпиады седьмых классов.

85. В выпуклом разностороннем четырехугольнике $ABCD$ середины сторон последовательно соединены отрезками. В результате получился четырехугольник $EFKL$. Определи, какую часть площади четырехугольника $ABCD$ составляет площадь четырехугольника $EFKL$.

86. Дано уравнение $\frac{x(a-x)}{x+a} + x - a = 10 - \frac{10x}{x+a}$, где a — действительное число. Определи число решений уравнения в зависимости от значений параметра a.

87. Докажи, что при любом $a \neq 0$ справедливо числовое неравенство

$$1 + \frac{1}{a^2} > \frac{2}{a} - \frac{11}{25a^2} + \frac{2}{5a}.$$

88. Дан вектор $\overrightarrow{OB}$, B (8; 6). Построй все точки, получающиеся из данной точки B последовательными поворотами вектора $\overrightarrow{OB}$ на прямые углы около начала координат. Определи вид фигуры, полученной в результате последовательного соединения указанных точек.

89. Три упрямых рыбака договорились весь улов разделить поровну. Первый рыбак разделил улов и разложил рыб в пакеты, сказав, что в каждом пакете по 1 кг 780 г, но второй рыбак заявил, что он верит только весам своего дедушки. Дедушка заявил, что в одном пакете 1 кг 790 г, в другом 1 кг 770 г, а в третьем 1 кг 780 г. Третий рыбак доверял только магазинным весам, которые показали те же результаты, что и весы дедушки, но в другом порядке. Как распределить пакеты между рыбаками, чтобы каждый считал, что он получил не менее 1 кг 780 г?

Примерные задания для проведения олимпиады восьмых классов.

90. Победителям олимпиады были вручены награды трех степеней. Число наград первой степени было на 12 меньше, чем второй степени. Наград третьей степени было вручено в два раза больше, чем первой и второй, но на 104 меньше произведения числа наград первой и второй степени. Сколько всего наград получили участники олимпиады?

91. Около правильного треугольника со стороной 12 см описана окружность, около этой окружности описан правильный шестиугольник. На каждой стороне шестиугольника, как на диаметре, построен полукруг с внешней стороны от шестиугольника. Вычислите площадь получившейся розетки.

92. Составьте квадратное уравнение, корни которого обратны квадратам корней уравнения $x^2 + 55x - 45 = 0$.

93. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} = \dfrac{8}{3} \\ \dfrac{yz}{y+z} = \dfrac{12}{5} \\ \dfrac{zx}{z+x} = \dfrac{24}{7}. \end{cases}$$

94. Докажите, что при любом $n \in N$ выражение $\dfrac{10^{2n-2}+2}{3} + \dfrac{10^{3n-3}+2^3}{3^2}$ равно целому числу.

Примерные задания для проведения олимпиады девятых классов.

Некоторые дополнительные замечания о требованиях к выполнению олимпиадных заданий учащимися IX—X классов. Уже в VII—VIII классах учащиеся должны были анализировать условия предлагаемых им на олимпиадах задач. Такой анализ приобретает еще большее значение в IX—X классах. Анализ условия в необходимых случаях является составной частью решения задачи участником олимпиады. Ученик должен рассмотреть различные возможные значения параметра в уравнении или неравенстве и в зависимости от этих значений определить решение данного уравнения или неравенства, рассмотреть область допустимых значений переменной, полностью проанализировать возможные соотношения данных и искомых величин в геометрической задаче и грамотно составить чертеж к ней и т. п. На это следует обращать внимание учащихся на занятиях математических кружков, во время подготовки к олимпиаде и при оценке работ участников олимпиады.

95. Найдите сумму бесконечной числовой последовательности

$$30,\ \frac{60}{\sqrt{5}+\sqrt{3}},\ 30(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2,\ \frac{60(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}},\ \ldots$$

96. Решите уравнение $|x^2+3x|=|2x-6|$.

97. Найдите площадь треугольника ABC, в котором даны координаты его вершин A (2; 3), B (8; $6\sqrt{3}+3$), C ($2+4\sqrt{3}$; 7).

98. Решите уравнение $1+a+a^2+\ldots+a^x=(1+a)\times$ $\times(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)(1+a^{16})(1+a^{32})$, где a — постоянное натуральное число.

99. Докажите, что при любом натуральном n сумма

$$1+3+6+10+\ldots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Примерные задания для проведения олимпиады десятых классов.

100. Решите уравнение $3x^2+5\sqrt{3x^2-5x-12}=48+5x$.

101. Решите уравнение $\sin^2 x\sin 2x+\cos^2 x\cos 2x=\frac{1}{2}$.

102. Вычислите объем пирамиды, в основании которой лежит равнобедренный треугольник с углом α при вершине, а все боковые ребра наклонены к основанию под углом 2α, если радиус описанной около пирамиды сферы равен R.

103. В уравнении $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}}=\sqrt{1980}$ число радикалов бесконечно. Найдите, чему равен x.

104. Жук ползет вверх по поверхности, вертикальное сечение которой имеет форму параболы $y=\frac{1}{2}x^2$. За единицу времени жук поднимается на 8 см. Потом он отдыхает столько же времени и вследствие скольжения за время отдыха опускается на расстояние, численно равное крутизне (тангенсу угла наклона) параболы в момент начала отдыха. Определите координаты жука в конце девятой единицы времени от начала движения.

ОБЛАСТНЫЕ, КРАЕВЫЕ, РЕСПУБЛИКАНСКИЕ (АССР) ОЛИМПИАДЫ

Областные, краевые, республиканские (АССР) математические олимпиады проводятся в сроки, устанавливаемые Министерствами просвещения СССР и республик. Если в районных олимпиадах представительство школ часто практически не ограничивалось, то на областные олимпиады районы направляют заявки об участии команд и их количественном составе по классам заранее. Кроме победителей районных и городских олимпиад, к участию в областной олимпиаде допускаются победители различных конкурсов по решению задач, проводимых центральными молодежными газетами, журналами, победители телевизионных олимпиад от данной области, если такие олимпиады проводились в текущем году. Заявки на этих участников направляются в облоно или соответственно крайоно, министерство просвещения АССР заранее организацией, проводившей конкурс или олимпиаду и присудившей приз данному участнику олимпиады.

Обычно областная олимпиада проводится в течение трех дней. В первый день проходят соревнования по решению задач, во второй день жюри проверяет работы участников олимпиады, а для участников организуются встречи с математиками, может быть прочитана интересная лекция, проведены экскурсии в музей или другие достопримечательные места города. На третий день с учащимися проводится разбор решений задач, предложенных на олимпиаде, беседы по решению задач и вообще о самостоятельных занятиях математикой. В такой беседе целесообразно раскрыть возможную тематику самостоятельных занятий математикой и методику такой работы, методику ознакомления с теоретическим материалом, раскрыть роль приложений теории к решению задач и некоторые методические рекомендации о порядке отбора и подхода к решению задач. Хорошо, если это, хотя бы в общем виде, было проиллюстрировано конкретным примером. Завершается все торжественным закрытием олимпиады. На закрытии олимпиады присутствуют, кроме членов оргкомитета, руководители органов народного образования, обкома комсомола и других областных (краевых, республиканских) организаций, представители вузов, различных предприятий и учреждений города.

Подготовительная работа к областной (краевой, республиканской, АССР) олимпиаде с учащимися начинается непосредственно после проведения районной олимпиады. Члены команды района получают от районного оргкомитета и руководителей кружков рекомендации по подготовке к областной олимпиаде. К участию в решении задач полезно привлекать всех кружковцев.

Вся подготовительная работа к олимпиаде возлагается на областной оргкомитет. Его работа начинается задолго до проведения областной олимпиады. Приказом по облоно создается оргкомитет. В него входят представители облоно, обкома комсомола, математики пединститута и других вузов города и области, представители областного института усовершенствования учителей и других организаций. Оргкомитет разрабатывает подробный план подготовки и проведения олимпиады, выделяет жюри для подготовки и проведения математической части олимпиады, создает комиссии по подготовке и проведению всех мероприятий, связанных с проведением олимпиады. Члены оргкомитета распределяются по комиссиям. Весь план проведения олимпиады согласуется с соответствующими организациями области и города. Оргкомитет определяет примерное число участников олимпиады, сроки проведения олимпиады, порядок и место размещения участников, место проведения соревнований, питание участников, их культурное обслуживание. Жюри, состоящее, как правило, из математиков высших учебных заведений и методистов института усовершенствования учителей, готовит задачи для проведения соревнований, намечает и утверждает порядок проведения соревнований и проверки работ участников олимпиады, намечает и обеспечивает подготовку лекций по математике для участников олимпиады, выделяет из своей среды специалистов для разбора решения задач, предложенных на олимпиаде, и для беседы с учащимися о решении задач и самостоятельных занятиях математикой.

На областной олимпиаде, как правило, присутствует представитель республиканского или центрального оргкомитета или центральной методической комиссии по проведению математических олимпиад. Это представитель ведущего вуза республики или страны. В его задачу входит оказание помощи областному оргкомитету и жюри. Он участвует в работе по проведению областной олимпиады так же, как и другие члены оргкомитета. Никаких особых прав и привилегий ему не дается. Обычно такой представитель участвует в подборе задач для проведения соревнований, участвует в проверке и оценке работ, в подведении итогов олимпиады, проводит беседы с учащимися на какие-либо математические темы, проводит занятия по решению нестандартных, как говорят, олимпиадных задач.

Оргкомитет определяет число и виды призов успешно выступившим на олимпиаде учащимся. Обычно призы выдаются не только из средств, выделенных непосредственно для проведения олимпиады, но и отдельными организациями, промышленными и сельскохозяйственными предприятиями, учебными заведениями. Это очень полезно, потому что способствует как популяризации олимпиады, так и отдельных учебных заведений и промышленных или сельскохозяйственных предприятий. Поэтому следует приветствовать выделение таких (пусть недорогих) специальных призов. Специальные призы могут выдаваться и за особо оригинальное решение, самому молодому участнику, участнику из особо отдаленной сельской школы и т. п. Такие участники должны выступить на олимпиаде достаточно успешно. Все призы присуждаются по рекомендации жюри решением оргкомитета.

Участие школьников в областной олимпиаде надо организовать так, чтобы это было для них не только соревнованием по решению задач, но и наградой за их большую работу по изучению математики, по решению задач и успешное выступление на предыдущих олимпиадах. Общий настрой всего оргкомитета должен быть оптимистическим. Надо создать на олимпиаде праздничную обстановку.

Обычно в областной олимпиаде участвуют школьники VII—X классов, иногда VIII—X классов. Вопрос этот решает облоно по рекомендации оргкомитета. Но район может направить и более молодого участника, если он готов участвовать по программе курса математики старших классов. Соревнования проводятся по классам. При подготовке задач для проведения соревнований оргкомитет использует задачи, присылаемые республиканскими или центральными оргкомитетами, но он вправе их изменить или заменить. Областной оргкомитет лучше знает специфику работы школ области, уровень математической подготовки учащихся и другие вопросы, которые необходимо учитывать при проведении олимпиады, с тем чтобы участие в олимпиаде не привело учащихся к разочарованию, а наоборот, вселило в них уверенность, пробудило желание более серьезно заняться математикой. Поэтому комплект задач по каждому классу должен содержать одну задачу, посильную для подавляющего большинства участников олимпиады данного класса. Решение такой задачи на дает права на получение какого-либо приза, но ученик уезжает с олимпиады не обескураженным, а с верой в возможность добиться лучших результатов. Но не следует слишком упрощать все предлагаемые на олимпиаде задачи ради хороших общих результатов. Среди задач, предлагаемых на олимпиаде, должны быть и такие, которые позволяют выявить наиболее сильных, наиболее способных и подготовленных по математике учащихся. Общий уровень задач областной олимпиады обычно несколько выше уровня задач районных олимпиад. В заключение приведу некоторые задачи, предлагавшиеся на областных олимпиадах в разных областях, краях, автономных республиках. Причем эти задачи предлагались в разные годы и не всегда в том сочетании, в котором они приведены в данном пособии. Но они могут представить интерес для учителей и быть использованы при работе математических кружков и при подготовке к олимпиадам.

Примерные задания для проведения олимпиады седьмых классов.

105. Пассажир едет в поезде, который идет со скоростью 60 км/ч, и видит, что мимо окна проходит встречный поезд в течение 4 с. Какова скорость встречного поезда, если его длина равна 120 м?

106. Разложи на множители многочлен $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$.

107. x и y — целые числа такие, что $3x + 7y$ делится на 19. Докажи, что $43x + 75y$ тоже делится на 19.

108. В треугольнике ABC разность углов C и A равна 90°. Проведены биссектрисы внутреннего и внешнего угла B до пересечения с прямой AC в точках D и E. Докажи, что $|BD| = |BE|$.

109. Восстанови цифры в записи умножения:

$$
\begin{array}{r}
\times\ ***\\
***\\
\hline
*0**\\
**5\\
*1**\\
\hline
*****8
\end{array}
$$

Примерные задания для проведения олимпиады восьмых классов.

110. Два велосипедиста выехали одновременно один из A в

B, другой из B в A. Каждый ехал с постоянной скоростью. Первый раз они встретились в 40 км от B и, прибыв в конечные пункты, немедленно повернули назад и встретились во второй раз в 20 км от A через 8 ч после первой встречи. Найдите расстояние от A до B и скорость каждого велосипедиста.

111. Докажите, что если p — любое простое число, большее трех, то $p^2 - 1$ делится на 24.

112. Докажите, что два треугольника подобны, если они имеют по равному углу и высоты, опущенные на стороны, заключающие эти углы, пропорциональны.

113. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} = 1 - z \\ \dfrac{yz}{y+z} = 2 - x \\ \dfrac{zx}{z+x} = 2 - y. \end{cases}$$

114. Постройте треугольник по двум углам и расстоянию между центрами описанной и вписанной окружности.

Вместо 111-й задачи можно предложить одну из следующих задач.

115. Докажите, что если $a + b + c = 0$, то $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

116. Докажите, что если a и b — взаимно простые натуральные числа, то уравнение $ax + by = ab$ не имеет решений в множестве натуральных чисел.

117. На столе лежат три совершенно одинаковых ящика. В одном из них лежит два черных шарика, в другом — черный и белый, в третьем — два белых. На ящиках сделаны надписи: «Два белых», «Два черных», «Черный и белый». Известно, что ни одна из надписей не соответствует действительности. Как, вынув только один шарик, определить, где лежат какие шарики?

118. Имеется металлический лом двух сплавов с содержанием никеля 5 и 40%. Сколько нужно взять каждого из этих сплавов, чтобы получить 840 г сплава с содержанием никеля 30%?

Примерные задания для проведения олимпиады девятых классов

119. Докажите, что число $5^{2n+1} + 3^{n+2} \cdot 2^{n-1}$ при любом натуральном n делится на 19.

120. Имеется десять стопок одинаковых по виду монет, по 10 монет в каждой стопке. Известно, что каждая монета весит целое число граммов и одна стопка состоит из одинаковых по весу фальшивых монет, каждая из которых отличается на 1 г от настоящих монет. Имеются весы и разновесы. С помощью одного взвешивания обнаружить стопку с фальшивыми монетами и узнать, тяжелее они или легче настоящих.

121. Найдите все натуральные числа, оканчивающиеся на 1981, которые после вычеркивания последних четырех цифр уменьшаются в целое число раз.

122. Постройте треугольник по точкам пересечения описанной около него окружности с продолжениями высоты, медианы и биссектрисы, проведенными из одной вершины треугольника.

123. В треугольнике две медианы взаимно перпендикулярны и равны 18 см и 24 см. Найдите площадь этого треугольника.

Некоторые из задач этого комплекта можно заменить одной из следующих задач.

124. Найдите все целые положительные n, при которых дробь $\frac{19n+17}{7n+11}$ равна целому числу.

125. Докажите, что $\sqrt{\underbrace{111\ldots1}_{2n\text{ раз}} - \underbrace{222\ldots2}_{n\text{ раз}}} = \underbrace{333\ldots3}_{n\text{ раз}}$.

126. Докажите, что если стороны прямоугольного треугольника составляют арифметическую прогрессию, то разность этой прогрессии равна радиусу вписанной окружности.

127. Постройте треугольник ABC, если известно положение трех точек, симметричных относительно сторон этого треугольника центру описанной около него окружности.

Примерные задания для проведения олимпиады десятых классов.

128. Докажите, что $\frac{(n+1)(n+2)\ldots(2n-1)\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)} = 2^n$.

129. Найдите сумму $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\ldots+\frac{n}{2^n}$.

130. Две правильные треугольные пирамиды имеют общую высоту, вершина каждой пирамиды лежит в центре основания другой, а боковые ребра одной пересекают боковые ребра другой. Боковое ребро первой пирамиды равно l и образует с высотой угол α, боковое ребро второй пирамиды образует с высотой угол β. Определите объем общей части пирамид.

131. Две окружности радиусов R и r внешне касаются друг друга и прямой. Найдите радиус окружности, вписанной в образовавшийся криволинейный треугольник.

132. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^3+y^3+z^3=8 \\ x^2+y^2+z^2=22 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=-\frac{z}{xy}. \end{cases}$

Некоторые из этих задач могут быть заменены следующими.

133. Внутри прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C взята точка M так, что треугольники AMB, BMC и AMC равновелики. Докажите, что $5|MC|^2 = |MB|^2 + |MA|^2$.

134. Решите уравнение $\cos\frac{\pi x}{9}\cdot\cos\frac{2\pi x}{9}\cdot\cos\frac{4\pi x}{9}=\frac{1}{8}$.

135. Упростите

$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}}}}$ при условии, что выражение содержит n радикалов.

136. Докажите, что $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$ делится на $5(x-y)(y-z)(z-x)$, где x, y и z — целые попарно неравные числа.

137. В полукруг радиуса R вписаны круг наибольшего диаметра и два круга, каждый из которых касается вписанного круга, данного полукруга и его диаметра. Определите площадь данного полукруга, не вошедшую во вписанные в него круги.

РЕСПУБЛИКАНСКИЕ ОЛИМПИАДЫ

До 1960 г. республиканские математические олимпиады в нашей стране не проводились. В 1960 г. Министерство просвещения РСФСР совместно с Московским государственным университетом провели первую экспериментальную олимпиаду в широких масштабах. На нее были приглашены команды и других союзных республик. В 1961 г. мы провели Первую Всероссийскую математическую олимпиаду. С этого же года стали проводиться республиканские олимпиады и в других союзных республиках.

В республиках, не имеющих деления на области, Республиканская олимпиада является третьим туром Всесоюзной олимпиады. В республиках, имеющих деление на области и другие административные единицы, Республиканская олимпиада является четвертым туром Всесоюзной олимпиады. В первые годы проведения всесоюзных олимпиад на четвертый, заключительный тур направлялись команды от каждой области, края, АССР. Поэтому не было необходимости в проведении республиканских олимпиад. Республиканские олимпиады по существу проводились только на Украине и в республиках без областного деления. Сейчас республиканские олимпиады проводятся во всех республиках.

В такой большой республике, как РСФСР, Республиканская олимпиада стала проводиться по зонам. На республиканских олимпиадах обычно присутствуют представители центрального оргкомитета по проведению Всесоюзной олимпиады. Но вся работа по организационной и математической подготовке и проведению олимпиады осуществляется республиканским оргкомитетом и жюри. Принципы организации республиканских олимпиад и содержание работы оргкомитета и жюри аналогичны тем, которые описаны при рассмотрении областных олимпиад. Поэтому рассмотрим содержание соревнований только на одной из олимпиад. В качестве примера рассмотрим задачи, предлагавшиеся на Первой Всероссийской олимпиаде.

Задания для учащихся седьмых классов.

138. Стороны произвольного выпуклого многоугольника покрашены снаружи. Проводится несколько диагоналей так, что никакие три не пересекаются в одной точке. Каждая из этих диагоналей тоже покрашена с одной стороны. Докажите, что хотя бы один из многоугольников, на которые разбит диагоналями исходный многоугольник, весь покрашен снаружи.

139. В квадрате $ABCD$ на стороне AB взята точка P, на BC — Q, на CD — R, на DA — S. Оказалось, что $PQRS$ — прямоугольник. Докажите, что $PQRS$ — либо квадрат, либо его стороны параллельны диагоналям квадрата $ABCD$.

140. Докажите, что среди любых 39 последовательных натуральных чисел обязательно найдется такое, у которого сумма цифр делится на 11.

141. Дана таблица 4×4 клетки. В некоторых клетках поставлено по звездочке. Покажите, что можно так расставить семь звездочек, что при вычеркивании любых двух строк и любых двух столбцов этой таблицы в оставшихся клетках всегда была хотя бы одна звездочка. Докажите, что если звездочек меньше семи, то всегда можно так вычеркнуть две строки и два столбца, что все оставшиеся клетки будут пустыми.

Задания для учащихся восьмых классов.

142. В вершинах прямоугольника $ABCD$ построены непересекающиеся окружности. Причем $R_A + R_C = R_B + R_D$. К окружностям A и C, B и D проведены общие внешние касательные. Докажите, что в полученный при пересечении касательных четырехугольник можно вписать окружность.

143. Докажите, что среди любых 39 последовательных натуральных чисел обязательно найдется такое, у которого сумма цифр делится на 11. Постройте пример, когда разность между двумя последовательными числами с суммой цифр, кратной 11, равна 39.

144. Имеется набор положительных чисел (a, b, c, d). Построим набор (ab, bc, cd, da), из него новый набор $(ab^2c, bc^2d, cd^2a, da^2b)$ и т. д. Докажите, что если мы когда-нибудь придем к первоначальному набору, то $a = b = c = d = 1$.

145. Докажите, что не существует ломаной, которая пересекала бы каждый из отрезков фигуры (рис. 5) один и только один раз.

146. Докажите, что не существует целых чисел a, b, c, d, удовлетворяющих равенствам:

$$abcd - a = \underbrace{11\ldots1}_{1961}, \quad abcd - b = \underbrace{11\ldots1}_{1961},$$

$$abcd - c = \underbrace{111\ldots1}_{1961}, \quad abcd - d = \underbrace{11\ldots1}_{1961}.$$

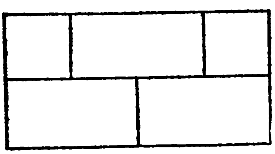


Рис. 5

Задания для учащихся девятых классов.

147. Точки M и B движутся равномерно и с равными угловыми скоростями соответственно по окружностям O_1 и O_2 (по часовой стрелке). Докажите, что вершина

O правильного треугольника MBO также движется равномерно по некоторой окружности.

148. В клетки таблицы $m \times n$ вписаны некоторые числа. Разрешается одновременно менять знак у всех чисел некоторого столбца и некоторой строки. Докажите, что многократным повторением этой операции можно превратить данную таблицу в такую, у которой сумма чисел, стоящих в любом столбце и в любой строке, неотрицательна.

149. a, b, p — любые целые числа. Докажите, что найдутся такие натуральные взаимно простые k, l, что $ak + bl$ делится на p.

150. n точек соединены отрезками так, что каждая точка с чем-нибудь соединена и нет таких двух точек, которые соединялись бы двумя разными путями. Докажите, что общее число отрезков равно $n - 1$.

151. Петя и Коля делят $2n + 1$ орех ($n \geqslant 2$). Причем каждый хочет получить возможно большее число орехов. Предлагаются три способа дележа (каждый проходит в три этапа, и I и II этапы общие для всех трех способов).

I. Коля делит все орехи на две части, в каждой не менее двух орехов.

II. Петя делит каждую часть снова на две, в каждой не менее ореха.

III. При первом способе Петя берет бóльшую и меньшую части; при втором способе Петя берет обе средние части; при третьем способе Петя берет либо бóльшую и меньшую части, либо обе средние, но за право выбора отдает Коле один орех.

Определите, какой способ самый выгодный для Пети и какой наименее выгоден для него.

Задания для учащихся десятых классов.

152. Докажите, что для любых трех бесконечных последовательностей натуральных чисел

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots,$$
$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots,$$
$$c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n, \ldots$$

найдутся два таких номера p и q, для которых $a_p \geqslant a_q$, $b_p \geqslant b_q$, $c_p \geqslant c_q$.

153. В прямоугольник 20×25 бросают 120 квадратов 1×1. Докажите, что в прямоугольник можно поместить круг с диаметром, равным 1, не имеющий общих точек ни с одним квадратом.

154. На плоскости фиксируется точка P. Рассматриваются всевозможные равносторонние треугольники ABC, для которых $|AP| = 3$, $|BP| = 2$. Какую наибольшую длину может иметь отрезок CP?

155. Имеется набор $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2k}$ из $+1$ и -1. Составляется новый набор $x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, \ldots, x_{2k}x_1$ и т. д. Докажите, что в конце концов обязательно получится набор из одних единиц.

ВСЕСОЮЗНАЯ ОЛИМПИАДА

Заключительный тур Всесоюзной олимпиады за последние годы по существу превратился в отборочные соревнования для определения состава команды СССР на Международную математическую олимпиаду. Это облегчает задачу его проведения, но вместе с тем лишает возможности многих победителей областных олимпиад встретиться с видными учеными математиками, послушать их лекции, встретиться со своими сверстниками из других республик и областей, установить с ними контакты, которые иногда бывают весьма полезными, серьезно влияют на становление математических интересов и развитие наклонностей учащихся.

Мы приведем в качестве примера содержания соревнований задачи, предложенные на Первой Всесоюзной математической олимпиаде.

Задания, предложенные для восьмых классов.

156. В некотором натуральном числе произвольно переставлены цифры. Докажите, что сумма полученного числа с исходным не равна $\underbrace{999\ldots9}_{1967\text{ цифр}}$.

157. В остроугольном треугольнике ABC высота AH, наибольшая из высот, равна медиане BM. Докажите, что угол ABC меньше $60°$.

158. Прожектор освещает угол $90°$. Докажите, что расположенные в четырех произвольных точках плоскости прожектора можно направить так, чтобы они осветили всю плоскость. (Эта задача дана и в девятых классах.)

159. Можно ли на окружности расположить числа 0, 1, 2, ..., 9 так, чтобы любые два соседних числа отличались на 3, 4 или 5?

160. Докажите, что существует число, делящееся на 5^{1000} и не содержащее в своей записи ни одного нуля.

Задания, предложенные для девятых классов.

161. Можно ли на окружности расположить числа 1, 2, 3, ..., 13 так, чтобы любые два соседних числа отличались на 3, 4 или 5?

162. Цифры некоторого числа переставили и сложили полученное число с исходным. Докажите, что если сумма равна 10^{10}, то исходное число делилось на 10.

163. В остроугольном треугольнике ABC высота CK равна медиане BQ и биссектрисе AP. Докажите, что треугольник ABC правильный.

164. Найдите все пары целых чисел x и y, удовлетворяющих уравнению $x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y$.

Задания, предложенные для десятых классов.

165. В последовательности целых положительных чисел каждый член, начиная с третьего, равен модулю разности двух предыдущих. Какое наибольшее число членов может иметь такая последовательность, если каждый ее член не превосходит 1967?

166. В каждой из восьми точек пространства стоит прожектор, который освещает октант (трехгранный угол со взаимно перпендикулярными ребрами) с вершиной в этой точке. Докажите, что можно направить прожектора так, чтобы они осветили все пространство.

167. «Король-самоубийца». На шахматной доске размером 1000×1000 стоит черный король и 499 белых ладей. Докажите, что при произвольном начальном расположении фигур король может стать под удар белой ладьи, как бы ни играли белые. (Ходы делаются так же, как и в обычных шахматах.)

168. Три последовательные вершины ромба лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD данного квадрата со стороной 1. Найдите площадь фигуры, которую заполняют четвертые вершины таких ромбов.

169. Натуральное число K обладает таким свойством: если M делится на K, то и число, записанное теми же цифрами, что и M, но в обратном порядке, делится на K. Докажите, что K — делитель числа 99.

МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА

Международные математические олимпиады начали проводиться с 1959 г. Их инициаторами были математики Румынии. С 1967 г. в них стали принимать участие и капиталистические страны. В настоящее время в международных математических олимпиадах принимают участие большинство социалистических стран и многие развитые капиталистические страны.

Организация и задачи проведения международных олимпиад во многом отличны от всесоюзных олимпиад. Международные математические олимпиады позволяют в определенной степени сравнивать содержание и состояние математического образования в разных странах по крайней мере в области работы с наиболее сильными по математике учащимися. А это позволяет каждой стране, участвующей в международных олимпиадах, вносить определенные коррективы в содержание математического образования наиболее сильных по математике учащихся, в содержание работы математических школ, внеклассной работы по математике, в содержание математических олимпиад внутри страны. Весьма полезны и сами контакты между математиками и будущими математиками — победителями национальных олимпиад.

Вместе с тем при проведении международных математических олимпиад имеются весьма значительные трудности. В странах, участвующих в олимпиадах, различны сроки обучения в средних школах: от 10 до 13 лет, а разница в возрасте в 2—3 года в этот период жизни человека часто имеет весьма существенное значение в развитии его умственных способностей, в развитии его мышления. Программы многих стран весьма существенно отличаются друг от друга. Вместе с тем соревнования проводятся по единым заданиям, соответствующим содержанию курса математики полной средней школы. Есть и другие трудности, например: языковые, трудность отработки единого содержания каждого задания, трудность проверки и единых критериев оценок работ участников разных стран. Поэтому часто приходится подбирать задачи, которые отражают не столько конкретное содержание программ, сколько дают возможность участникам проявить свои математические способности, свою математическую эрудицию и смекалку. При этом, конечно, проверяется знание и конкретных математических понятий.

Но стремление математиков к достижению взаимопонимания, к использованию международных олимпиад для улучшения состояния математического образования определенной части учащихся в стране, большой опыт и эрудиция членов жюри позволяют преодолеть эти трудности. Для проведения международных соревнований создается жюри из руководителей команд всех участвующих в олимпиаде стран. Жюри разработана специальная система отбора содержания соревнований. В основе ее лежит участие в подборе содержания всех членов жюри, детальное обсуждение заданий и отбор из всего огромного множества задач, предложенных всеми странами, шести задач, наиболее полно удовлетворяющих желание каждого члена жюри. Эти шесть задач тщательно и многократно редактируются, особенно в процессе перевода на разные языки. Затем вырабатываются критерии оценки каждой задачи, даже каждой части решения задачи. В целях осуществления единых критериев оценки выполненных участниками работ жюри разработало систему координации, сущность которой заключается в контрольной проверке решения каждой задачи двумя учеными-математиками (координаторами) страны — организатора олимпиады с последующим утверждением и иногда довольно детальным рассмотрением как общих результатов соревнований, так и результатов выполнения отдельных задач отдельными участниками олимпиады. Организаторам приходится преодолевать и другие трудности, в том числе трудности организационного порядка.

Следует отметить положительное организующее влияние международных математических олимпиад на проведение олимпиад в каждой стране, систематически участвующей в Международной олимпиаде. Без участия в международных математических олимпиадах возможно трудно было бы систематически, из года в год проводить олимпиады всех уровней, во всех республиках, областях, районах, школах страны.

Далее приведем задачи, предложенные участникам XX Международной олимпиады.

Первый день соревнований.

170. Пусть m и n — натуральные числа такие, что $n > m \geqslant 1$. В десятичной записи группа из последних трех цифр числа 1978^m совпадает с группой последних трех цифр числа 1978^n. Найдите m и n такие, чтобы сумма $m + n$ была наименьшей.

171. Пусть P — данная точка внутри данной сферы и A, B, C — произвольные три точки сферы такие, что отрезки PA, PB, PC взаимно перпендикулярны. Пусть Q — вершина параллелепипеда, определенного отрезками PA, PB и PC, диагонально противоположная к P. Найдите множество точек Q.

172. Множество всех натуральных чисел является объединением двух непересекающихся подмножеств
$\{f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n) \ldots\}$, $\{g(1), g(2), g(3), \ldots, g(n), \ldots\}$,
где $f(1) < f(2) < \ldots < f(n) \ldots$, $g(1) < g(2) < \ldots < g(n) \ldots$
и $g(n) = f(f(n)) + 1$ для всех $n \geqslant 1$. Определите $f(240)$.

Второй день соревнований.

173. Окружность касается внутренним образом окружности, описанной около равнобедренного треугольника ABC, а также равных сторон этого треугольника в точках P и Q соответственно. Докажите, что середина отрезка PQ является центром окружности, вписанной в треугольник ABC.

174. Пусть $\{a_k\}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, n)$ — последовательность различных натуральных чисел. Докажите, что для каждого натурального n выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

175. Международное общество состоит из представителей шести различных стран. Список членов общества состоит из 1978 фамилий, занумерованных числами 1, 2, 3, ..., 1978. Докажите, что существует хотя бы один член общества, номер которого равняется сумме номеров двух членов из его страны или удвоенному номеру некоторого члена из его страны.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

В решении задач на построение не приводится подробный анализ и опущены доказательства того, что построенная фигура удовлетворяет условию задачи. Во многих алгебраических задачах также опущены подробности в обосновании и в выкладках.

1. а) 301 000, б) 36 400.

2. а) $\begin{array}{r} *5*8 \\ +\,5*3* \\ \hline *0209 \end{array}$ Последняя звездочка второго слагаемого может быть только единицей. Тогда вторая звездочка первого слагаемого 7. Третий разряд второго слагаемого 6, четвертый в первом 4 и пятый в сумме 1. б) Двузначное число может получиться при умножении 63 только на единицу. Значит, второй множитель 11.

3. $[AB]$, $[BC]$, $[BD]$, $[DC]$, $[AC]$, $[AE]$, $[EC]$, $[BE]$, $[BD]$, $[BO]$, $[EO]$, $[AD]$, $[AO]$, $[OD]$. Всего 13 отрезков.

4. Пусть вес пачки чая равен x г. Тогда имеем уравнение $6x + 50 = x + 100 + 200$. Отсюда $x = 50$ г.

5. $|ВГ| < |ГД|$ на 5 (рис. 6), $|ГД| + |ВГ| = 50 - 15 = 35$, $35 - 5 = 30$, $|ВГ| = 30 : 2 = 15$, $|ГД| = 15 + 5 = 20$. Значит, $|БВ| = 20 - 15 = 5$, $|АБ| = 15 - 5 = 10$, $|МД| = 30 - 20 = 10$, $|АМ| = 50 + 10 = 60$.

6. Конгруэнтность проверяется совмещением фигур.

7. За каждые 2 ч гусеница поднимается на $10 - 4 = 6$ см. Значит, за 10 ч она поднимется на $6 \cdot 5 = 30$ см и за одиннадцатый час еще на 10 см. Итого за 11 ч гусеница поднимется на 40 см.

8. $M = \{\widehat{EOD}, \widehat{EOC}, \widehat{EOB}, \widehat{EOA}, \widehat{DOC}, \widehat{DOB}, \widehat{DOA}, \widehat{COB}, \widehat{COA}, \widehat{BOC}\}$, всего 10 углов.

9. Трехзначное число может получиться от умножения 785 только на единицу, а четырехзначное с первой цифрой 1 только от умножения на 2. Следовательно, второй множитель равен 121.

10. $4 + 3 = 7$; $7 \cdot 2 = 14$; $14 + 3 = 17$; $17 \cdot 2 = 34$; $34 + 3 = 37$; $37 \cdot 2 = 74$. Ответ: 74 конфеты.

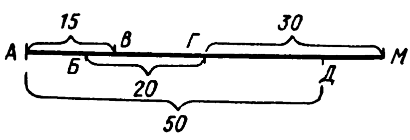


Рис. 6

11. Скорость от A до B x к/мч, от B до A $(x + 20)$ км/ч. Обратный путь поезд прошел за

12 ч. Записав расстояния и приравняв их, получим уравнение $16x = 12(x + 20)$. Отсюда $x = 60$ км/ч, $|AB| = 60 \cdot 16 = 960$; $|AB| = 960$ км.

12. $|2x| \cdot |-3{,}5| = |-28| \Leftrightarrow |2x| \cdot 3{,}5 = 28 \Leftrightarrow |2x| = 8 \Leftrightarrow 2x = 8$ или $2x = -8 \Leftrightarrow x = 4$ или $x = -4$.

Ответ: $x = 4$ или $x = -4$.

Рис. 7

13. Из схемы (рис. 7) ясно, что Петя — Герасимов, Володя — Семенов, Миша — Иванов.

14. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \cdot 9$.

15. Если сложить вес трех поросят и двух ягнят с весом двух поросят и трех ягнят, то получим вес пяти поросят и пяти ягнят, равный 45 кг. Значит, один поросенок и один ягненок весят 9 кг, а два поросенка и два ягненка весят 18 кг. Вычтя это из первого данного веса, получим вес поросенка, равный 4 кг. Тогда ягненок весит 5 кг.

16. а) 748, б) 449.

17. а) По признакам делимости 7920 делится на 3, 4 и 5. Значит, оно делится на $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$.

б) $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$, $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$, НОК (360; 84) больше НОД (360; 84) в $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$ раз.

18. а) Могут быть: круг, разделенный на секторы; прямоугольник, разделенный на конгруэнтные прямоугольники; угол, разделенный на конгруэнтные углы.

19. а) Конгруэнтный треугольник строится параллельным переносом данного треугольника. б) Прямоугольник, конгруэнтный данному, строится параллельным переносом данного. Можно использовать построение по клеточкам.

20. а) Для построения оси симметрии из точек A и B одним и тем же радиусом, большим половины $|AB|$, проводим дуги. Прямая MN, проведенная через точки пересечения дуг, и будет осью симметрии. Для построения точек, симметричных данным, опускаем из данных точек перпендикуляры на MN и продолжаем их на расстояние, равное расстоянию от этих точек до MN (рис. 8). б) Построение показано на рисунке 9. Задача имеет два решения.

21. Всего x яиц. $x - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x$; $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}x = \frac{1}{4}x$;

$\frac{1}{4}x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}x = \frac{1}{8}x$; $\frac{1}{8}x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}x = \frac{1}{16}x$; $\frac{1}{16}x = 10$; $x = 160$.

22. $(5 - 2) \cdot 100 + (8 - 3) \cdot 1000 + (2 - 9) + (4 - 7) \cdot 10 = 300 + 5000 - 7 - 30 = 5263$. Ошибка в сумме допущена на 5263. Сумма получилась больше истинного значения. Истинное значение суммы равно $28\,975 - 5263 = 23\,712$.

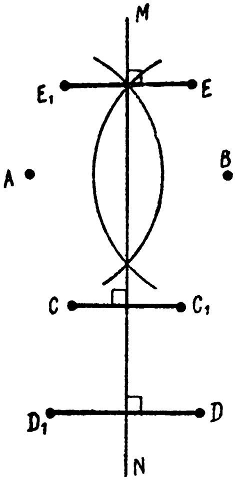


Рис. 8

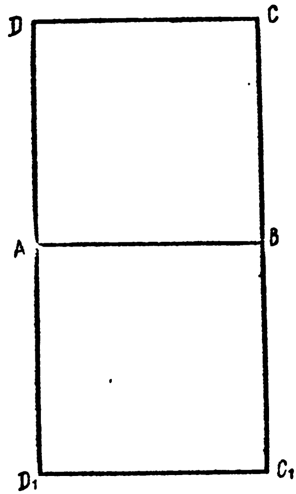


Рис. 9

23. $(2x-5)\cdot\left(\frac{3}{2}x+9\right)\cdot(0{,}3x-12)=0 \Leftrightarrow 2x-5=0$ или $\frac{3}{2}x+9=0$, или $0{,}3x-12=0 \Leftrightarrow x=2{,}5$ или $x=-6$, или $x=40$.

24. $$\frac{27^3\cdot 4^5}{6^8}-\frac{5^5\cdot 2^4}{10^4}-\frac{2^6\cdot 3^4}{6^4}=\frac{3^9\cdot 2^{10}}{3^8\cdot 2^8}-\frac{5^5\cdot 2^4}{5^4\cdot 2^4}-\frac{2^6\cdot 3^4}{3^4\cdot 2^4}=$$
$$=3\cdot 2^2-5-2^2=12-5-4=3.$$

25. $$\begin{array}{ccc} а\cdot а & = & б \\ - & & - \\ в\cdot и & = & г \\ \hline е\cdot а & = & а \end{array}$$

Так как $е\cdot а=а$, то $е=1$. $б\leqslant 9$. Значит, $а=2$ или $а=3$, $а$ не может равняться 1, так как $е=1$. $в\neq 1$, значит, $в>1$. Но $в<а$, следовательно, $в=2$, $а=3$. Тогда $б=9$. $в=2$, значит, $и<5$, $и>3$. Поэтому $и=4$, $г=8$.

26. а) 16. Указание. Сначала сократить каждую дробь. б) 1990. Указание. Выделить множители, дающие в произведении 100 и 10, сократить.

27. а) В семье два брата, две сестры, мать и отец, всего 6 человек; б) $\mathrm{VI}-\mathrm{IV}=\mathrm{XI}\to\mathrm{VI}+\mathrm{IV}=\mathrm{X}$.

28. а) $x=3$; $y=2$; б) $x=10$.

29. Графики изображены на рисунках 10, *а* и 10, *б*.

30. а) $81a^{20}x^{16}-16b^8y^{20}=(9a^{10}x^8-4b^4y^{10})\cdot(9a^{10}x^8+4b^4y^{10})=$ $=(3a^5x^4-2b^2y^5)\cdot(3a^5x^4+2b^2y^5)\cdot(9a^{10}x^8+4b^4y^{10})$.

б) $(2a+3b)^3-18ab\,(2a+3b)=8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3-$ $-36a^2b-54ab^2=8a^3+27b^3=(2a+3b)\,(4a^2-6ab+9b^2)$.

31. а) Ученик строит, используя симметрию относительно произвольной оси, или параллельный перенос, или при произвольном положении фигуры — конгруэнтность отрезков и признаки конгруэнтности фигур.

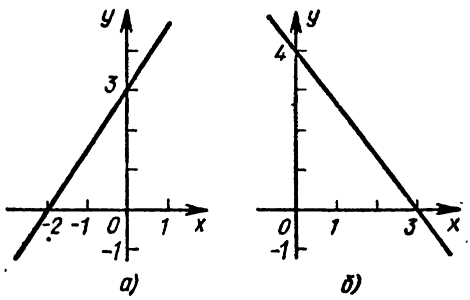


Рис. 10

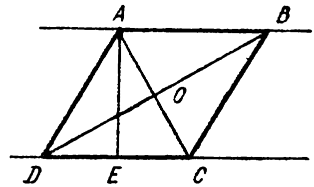


Рис. 11

32. Область определения уравнения $x \neq 1$.

$$\frac{11}{5(x-1)} + \frac{x+3}{(x-1)^2} = \frac{7x+6}{5(x-1)^2} + \frac{5}{2(x-1)} \Leftrightarrow 22x - 22 + 10x + $$
$$+ 30 = 14x + 12 + 25x - 25 \Leftrightarrow -7x = -21 \Leftrightarrow x = 3.$$

33. $$(k^2+1) + \frac{1}{k^2+1} - 2 = \frac{(k^2+1)^2 + 1 - 2\cdot(k^2+1)}{k^2+1} =$$
$$= \frac{(k^2+1-1)^2}{k^2+1} = \frac{k^4}{k^2+1} \geqslant 0.$$

34. Строим две параллельные прямые на расстоянии 4 см друг от друга (рис. 11). На одной из этих прямых берем произвольную точку A и из нее как из центра проводим дугу радиуса 6 см до пересечения со второй прямой в точке C. Через середину отрезка AC проводим перпендикуляр к AC. Он пересекает прямые в точках B и D. $ABCD$ — требуемый ромб.

35. $9999^{10} = (99 \cdot 101)^{10} = 99^{10} \cdot 101^{10} > 99^{10} \cdot 99^{10} = 99^{20} \Rightarrow$
$\Rightarrow 9999^{10} > 99^{20}$.

36. $$\begin{array}{r} *8* \\ \times\ \underline{4*2} \\ 7** \\ 3** \\ \underline{****} \\ *****0 \end{array}$$

Так как на конце результата цифра 0, то первый множитель оканчивается цифрой 5 или нулем, ибо при умножении на 2 нуль может получиться только от умножения 5 или нуля. По цифре 7 и множителю 2 определяем, что первый множитель начинается с цифры 3. По второму неполному произведению определяем, что вторая цифра второго множителя 1. Итак, первый множитель 385, второй 412 или первый 380, а второй 412.

37. а) $$\frac{4^6 \cdot 9^5 + 6^9 \cdot 120}{8^4 \cdot 3^{12} - 6^{11}} = \frac{2^{12} \cdot 3^{10} + 2^9 \cdot 3^9 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2^3}{2^{12} \cdot 3^{12} - 2^{11} \cdot 3^{11}} =$$
$$= \frac{2^{12} \cdot 3^{10} \cdot (1+5)}{2^{11} \cdot 3^{11}(2 \cdot 3 - 1)} = \frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 5} = 0{,}8.$$

б) $$\frac{437^2 - 363^2}{537^2 - 463^2} = \frac{(437-363)\cdot(437+363)}{(537-463)\cdot(537+463)} = \frac{74 \cdot 800}{74 \cdot 1000} = 0{,}8.$$

38. а) $$\frac{a^2 - 6a + 8}{a^2 - a - 12} = \frac{(a-2)(a-4)}{(a+3)\cdot(a-4)} = \frac{a-2}{a+3}.$$

б) $\dfrac{x^4 - x^2 - 2x - 1}{x^4 - 3x^2 + 1} =$

$= \dfrac{x^4 - (x+1)^2}{(x^4 - 2x^2 + 1) - x^2} =$

$= \dfrac{(x^2 - x - 1) \cdot (x^2 + x + 1)}{(x^2 - 1)^2 - x^2} =$

$= \dfrac{(x^2 - x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x^2 - 1 - x) \cdot (x^2 - 1 + x)} =$

$= \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 + x - 1}.$

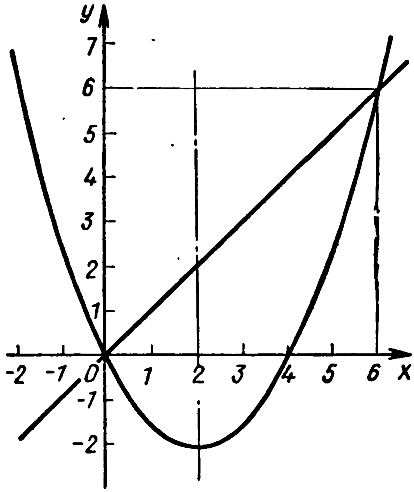


Рис. 12

39. Построим графики каждого из уравнений системы (рис. 12):

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x, \\ y = x. \end{cases}$$

Решением будут координаты точек пересечения этих графиков $\{(0, 0);\ (6, 6)\}$.

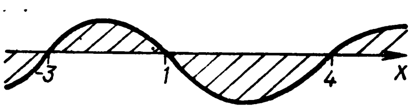


Рис. 13

40. Проиллюстрируем интервалы знакопостоянства функции, стоящей в левой части неравенства, рисунком (рис. 13). Отсюда сразу получим результат. Можно решить другим способом, рассмотрев три системы трех неравенств, в каждой из которых один множитель положителен, а два отрицательны. Ответ: $x \in]-3;\ 1[\cup]4;\ \infty[$.

41. Пусть сторона квадрата равна x (рис. 14, *б*). Тогда его площадь x^2. Площадь прямоугольника равна ab. Следовательно, $x^2 = ab$, $x = \sqrt{ab}$. Построение отрезка x и квадрата показано на рисунке 14, *б*.

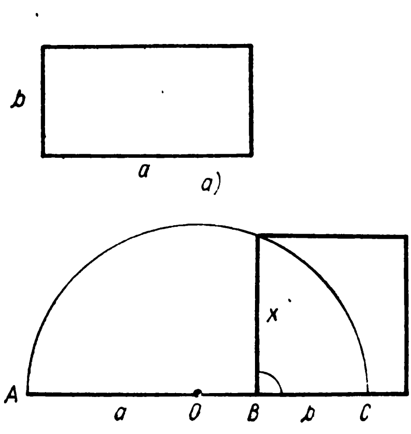


Рис. 14

42. Проводим две параллельные прямые на расстоянии h (рис. 15). При произвольной точке A строим угол, равный данному. Его сторона пересекает вторую прямую в точке B — второй вершине треугольника. Проводим ось симметрии параллельных прямых и из точки A радиусом m_a проводим дугу до пересечения с осью симмет-

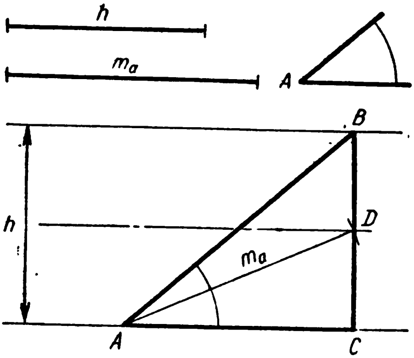


Рис. 15

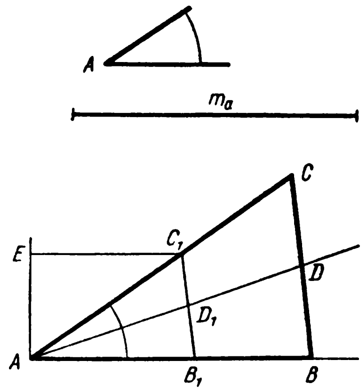


Рис. 16

рии. Через полученную точку D и точку B проводим прямую. В пересечении с первой параллельной прямой получаем вершину C искомого треугольника. При выполнении анализа следует показать, что должно быть $m_a > \frac{h}{2}$.

43. Строим угол A. От вершины угла A на его горизонтальной стороне откладываем отрезок произвольной длины b_1, $b_1 = |AB_1|$. На перпендикуляре к AB_1 откладываем $|AE| = \frac{2}{3} \cdot b_1 = h_1$ и через точку E проводим прямую, параллельную прямой AB_1. В пересечении со второй стороной угла получаем точку C_1. Треугольник AB_1C_1 подобен искомому. Строим его медиану AD_1. Продолжаем AD_1 до $AD = m_a$ и через точку D проводим $(BC) \parallel (B_1C_1)$. Треугольник ABC искомый (рис. 16). Задача всегда имеет решение и притом единственное.

44. $|3x^2 + 5x| = 2 \Leftrightarrow 3x^2 + 5x = 2$ или $3x^2 + 5x = -2 \Leftrightarrow 3x^2 + 5x - 2 = 0$ или $3x^2 + 5x + 2 = 0$. Решаем каждое уравнение отдельно: $3x^2 + 5x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6} \Leftrightarrow x = -2$ или $x = \frac{1}{3}$; $3x^2 + 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{6} = \frac{-5 \pm 1}{6} \Leftrightarrow x = -1$ или $x = -\frac{2}{3}$.

Ответ: $\left\{-2;\ -1;\ -\frac{2}{3};\ \frac{1}{3}\right\}$.

45. Обозначим $\begin{cases} x + y = u, \\ xy = v \end{cases}$ тогда $\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2 + xy + y^2 = 19 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 11 \\ u^2 - v = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 11 \\ u^2 + u - 30 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -6 \\ v = 17 \end{cases}$ или

$\begin{cases} u = 5 \\ v = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -6 \\ xy = 17 \end{cases}$ или $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$

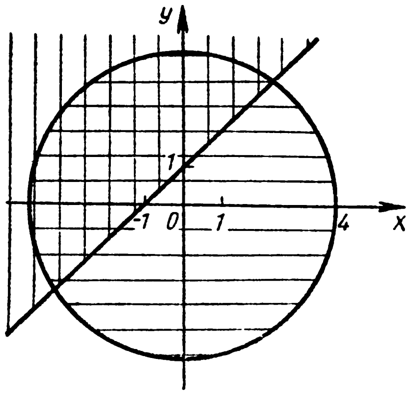


Рис. 17

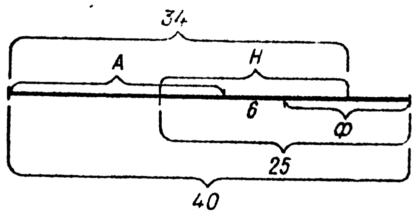


Рис. 18

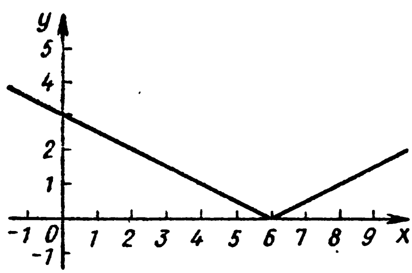


Рис. 19

или $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$, так как первая система не имеет решения.

46. Строим окружность радиуса 4 и прямую $y = x + 1$. Решением первого неравенства будут точки построенного круга, а решением второго неравенства — точки построенной прямой и полуплоскости, расположенной выше этой прямой. Пересечение построенных множеств является решением системы. На рисунке 17 оно заштриховано двойной штриховкой.

47. Левую часть равенства умножить и разделить на $1 - b$. В числителе в результате последовательного применения формулы разности квадратов двух чисел получим $1 - b^{2^{n+1}}$. Следовательно, левая часть равенства равна $\frac{1 - b^{2^{n+1}}}{1 - b}$. В правой части записана сумма геометрической прогрессии. Она равна $\frac{1 - b^{2^{n+1}}}{1 - b}$. Значит, равенство верно.

48. Изобразим условие задачи схематически отрезками прямой (рис. 18). Тогда имеем: только французский язык изучают $40 - 34 = 6$, немецкий всего изучают $25 - 6 = 19$ человек. Немецкий с английским или французским изучают $19 - 6 = 13$ человек. Английский и немецкий изучают $(13+3):2=8$ человек, немецкий и французский изучают $13 - 8 = 5$ человек, только английский — $34 - 19 = 15$ человек.

49. а) 3,6; б) 0,0001.

50. а) Приближенно 2,74; б) приближенно 0,841.

51. а) График изображен на рисунке 19; б) находим корни каждого слагаемого: $x + 2 = 0$, $x = -2$; $x - 3 = 0$, $x = 3$. Они разбивают ось x на три интервала (рис. 20, *а*). Строим график в каждом интервале отдельно (рис. 20, *б*): $x < -2$, $y = -x - 2 - x + 3 = -2x + 1$; $-2 \leqslant x < 3$, $y = x + 2 - x + 3 = 5$; $x \geqslant 3$, $y = x + 2 + x - 3 = 2x - 1$.

52. а) 2; б) 7,5.

54. Доказывается на основе признаков: а) параллельности плоскостей; б) перпендикулярности прямой и плоскости.

55. $x = \sqrt{93} = \sqrt{100 - 7} =$
$= \sqrt{10^2 - (\sqrt{7})^2} =$
$= \sqrt{10^2 - (\sqrt{16 - 9})^2} =$
$= \sqrt{10^2 - (\sqrt{4^2 - 3^2})^2}$. Построение показано на рисунке 21.

56. При $x = 2{,}5$ числитель и знаменатель равны нулю. Для раскрытия неопределенности разложим числитель и знаменатель на множители и до перехода к пределу сократим дробь. После этого можно применить теоремы о пределах и найти предел:

$$6x^2 - x - 35 = 6(x - x_1) \times (x - x_2) = 6\left(x + 2\frac{1}{3}\right) \times (x - 2{,}5) = (3x + 7) \cdot (2x - 5),$$
$$6x^2 - x - 35 = 0,$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 840}}{12} = \frac{1 \pm 29}{12},$$
$$x_1 = -2\frac{1}{3}, \quad x_2 = 2{,}5.$$

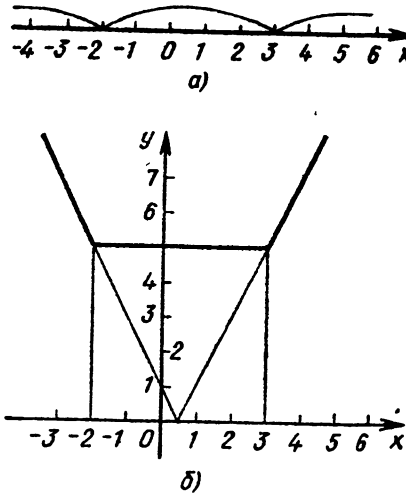


Рис. 20

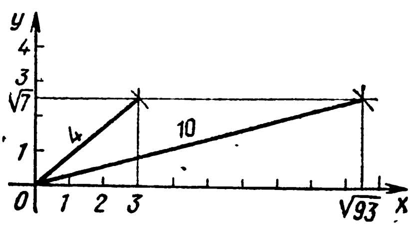


Рис. 21

$$12x^2 - 20x - 25 = 12(x - x_1)(x - x_2) = 12\left(x + \frac{5}{6}\right)(x - 2{,}5) =$$
$$= (6x + 5) \cdot (2x - 5). \; 12x^2 - 20x - 25 = 0, \; x = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 300}}{12} =$$
$$= \frac{10 \pm 20}{12}, \; x_1 = -\frac{5}{6}, \; x_2 = 2{,}5.$$

$$\lim_{x \to 2{,}5} \frac{6x^2 - x - 35}{12x^2 - 20x - 25} = \lim_{x \to 2{,}5} \frac{(3x + 7)(2x - 5)}{(6x + 5)(2x - 5)} = \lim_{x \to 2{,}5} \frac{3x + 7}{6x + 5} =$$
$$= \frac{\lim\limits_{x \to 2{,}5} 3 \cdot \lim\limits_{x \to 2{,}5} x + \lim\limits_{x \to 2{,}5} 7}{\lim\limits_{x \to 2{,}5} 6 \cdot \lim\limits_{x \to 2{,}5} x + \lim\limits_{x \to 2{,}5} 5} = \frac{3 \cdot 2{,}5 + 7}{6 \cdot 2{,}5 + 5} = \frac{14{,}5}{20} = 0{,}775.$$

57. Найти отношение каждого последующего слагаемого к предыдущему и убедиться, что оно равно одному и тому же числу: $\frac{\sqrt{5}(\sqrt{7} - \sqrt{5})}{2}$. Это число меньше 1. Следовательно, надо найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, первый член которой $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{10}$, а знаменатель $\frac{\sqrt{5}(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{2}$. Эта сумма будет равна $\frac{\sqrt{7}}{35}$.

58. $s(t)=\sqrt{(3t^2-4t+5)^3}$, $v(t)=s'(t)=\frac{3}{2}\sqrt{3t^2-4t+5}\times$

$$\times(6t-4)=3(3t-2)\cdot\sqrt{3t^2-4t+5}.\ a=v'(t)=s''(t)=$$

$$=3\left(3\sqrt{3t^2-4t+5}+(3t-2)\cdot\frac{3t-2}{\sqrt{3t^2-4t+5}}\right).$$

$$v(1)=3\cdot(3-2)\cdot\sqrt{3-4+5}=3\cdot\sqrt{4}=6;$$

$$v(2)=3\cdot(3\cdot2-2)\cdot\sqrt{3\cdot2^2-4\cdot2+5}=12\cdot\sqrt{9}=36;$$

$$a(1)=3\cdot\left(3\cdot\sqrt{3-4+5}+(3-2)\cdot\frac{3-2}{\sqrt{3-4+5}}\right)=19{,}5;$$

$$a(2)=3\cdot\left(3\sqrt{3\cdot4-4\cdot2+5}+(3\cdot2-2)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{6\cdot2-4}{2\cdot\sqrt{3\cdot4-4\cdot2+5}}\right)=43.$$

59. Найдем еще одну точку сечения α (рис. 22). Через данные точки E и K проведем плоскость $Q \parallel (BB_1)$. Отрезок KE лежит в этой плоскости и принадлежит α. Через ребра BB_1 и DD_1 проведем плоскость β. Q и β пересекаются по (O_1O_2). Точка O пересечения прямых O_1O_2 и KE принадлежит α. Значит, прямая $(PO)\subset\alpha$. Так как она лежит в плоскости β, то она пересекает BB_1 в точке F. PO — ось симметрии прямоугольника B_1BDD_1. Она параллельна основаниям куба. Значит, F — середина BB_1, и поэтому α пересекает основания по прямым KN и EM, соответственно параллельным B_1D_1 и BD и делящим C_1D_1 и AD пополам. Соединив последовательно все точки пересечения, получим в сечении шестиугольник $KNPMEF$. Все стороны этого шестиугольника равны между собой, и каждая из них равна $b=|KN|=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Легко показать, что все углы этого шестиугольника также равны между собой. Следовательно, шестиугольник правильный и его площадь будет равна

$$S=6\cdot\frac{b^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}.$$

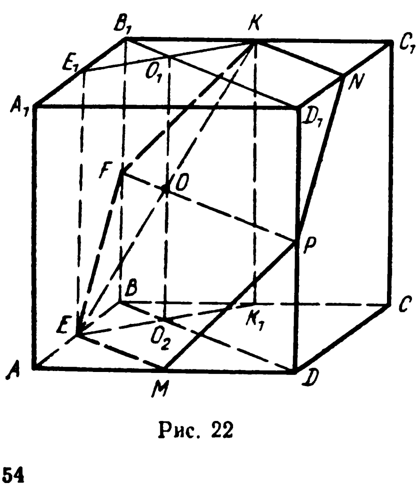


Рис. 22

60. $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 5$, $x_0 = 3$. Уравнение касательной будет: $y - y_0 = k(x - x_0)$.
$x_0 = 3, y_0 = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 3^2 + 5 = 5$.
$k = y'(x_0)$, $y' = x^2 - 2x$,
$y'(3) = 3^2 - 2 \cdot 3 = 3$, $k = 3$.
$y - 5 = 3(x - 3)$; $y = 3x - 4$.

Для схематического построения графика функции найдем экстремальные значения функции $y' = 0$, $x^2 - 2x = 0$, $x(x-2) = 0$,

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 5, \end{cases} \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 3\frac{2}{3}. \end{cases}$$

График функции и касательная изображены на рисунке 23.

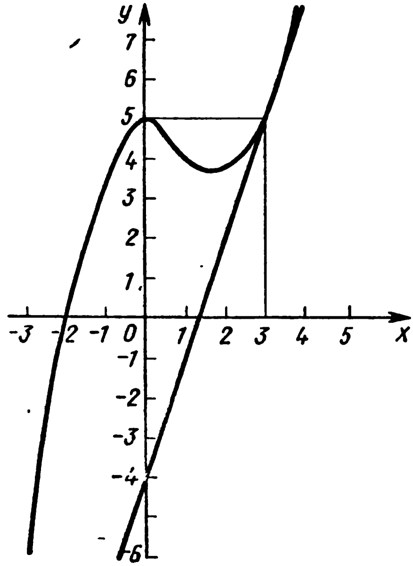


Рис. 23

61. $\frac{1 + \cos 2x + \cos 4x}{\sin 2x + \sin 4x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \frac{\cos 2x + 2\cos^2 2x}{\sin 2x(1 + 2\cos 2x)} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Находим ОДЗ. $\sin 2x \neq 0$; $2x \neq \pi n$, $x \neq \frac{\pi}{2}n$, где $n \in \mathbf{Z}$.

$1 + 2\cos 2x \neq 0$; $\cos 2x \neq -\frac{1}{2}$; $2x \neq \pm\frac{2}{3}\pi + 2\pi k$;

$x \neq \pm\frac{1}{3}\pi + \pi k$, где $k \in \mathbf{Z}$.

Находим множество решений уравнения $\frac{\cos 2x(1 + 2\cos 2x)}{\sin 2x(1 + 2\cos 2x)} = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

$\operatorname{ctg} 2x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $2x = \frac{\pi}{3} + \pi m$, $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \cdot m$, где $m \in \mathbf{Z}$.

Проверим, все ли множество решений входит в ОДЗ. Изобразим множество, не входящее в ОДЗ, и полученное решение на единичном круге (рис. 24) соответственно точками D_l и A_l. Значения A_1 и A_3 исключаем из решения. Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

62. $(DK) \parallel (EF) \parallel (CB)$ и $(DE) \parallel (FK) \parallel (AS)$. Из этого следует, что $DEFK$ — параллелограмм. Проведем плоскость SAO (рис. 25). Она пересечет $DEFK$ по $(OO_1) \parallel (AS)$. Следовательно, $(OO_1) \parallel (DE)$, но $(DK) \perp$ пл. ASO и, значит, $(DK) \perp (DE)$. Следовательно, $DEFK$ — прямоугольник. $|DK| = \frac{2}{3} \cdot |BC| = \frac{2}{3}a$; $|DE| = \frac{1}{3} \times$

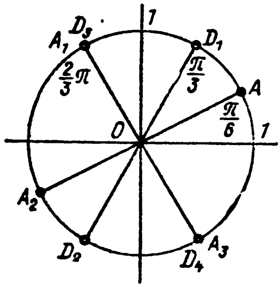


Рис. 24

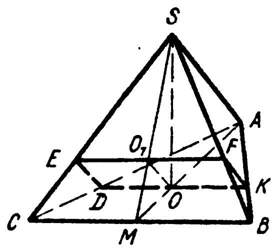


Рис. 25

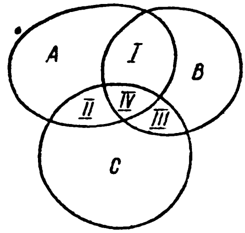


Рис. 26

$\times |AS| = \frac{1}{3} \cdot 2a = \frac{2}{3}a$. Площадь $DEFK = |DK| \cdot |DE| = \frac{2}{3}a \times$ $\times \frac{2}{3}a = \frac{4}{9}a^2$.

63. Указанные числа должны оканчиваться на 12, 32 или 52. При каждой из таких возможностей на первых трех местах может стоять любая из данных четырех цифр. Это размещения (кортежи) с повторениями. Их будет 4^3. Всего чисел $64 \cdot 3 = 192$. Можно для одного из окончаний и непосредственно подсчитать число возможностей для первых трех мест.

64. Изобразим данные множества с помощью кругов Эйлера (рис. 26). Левая часть равенства — численность всего объединения. Каждый элемент объединения считается один раз. В правой части — сумма численностей множеств A, B, C. При этом элементы попарных пересечений будут сосчитаны дважды. Сумму численностей этих множеств надо вычесть. Но тогда элементы пересечения всех трех данных множеств будут вычтены три раза, и они были сосчитаны три раза. Значит, численность этого пересечения надо прибавить, после чего в левой части все элементы объединения будут сосчитаны один раз. Значит, формула верна.

65. $\sin 2x - \sqrt{3}(\sin x - \cos x) - 1 = \cos 2x \Leftrightarrow \sin 2x - \sqrt{3} \times$ $\times (\sin x - \cos x) - (1 + \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin x \cos x - \sqrt{3}(\sin x -$ $- \cos x) - 2\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 2\cos x(\sin x - \cos x) - \sqrt{3}(\sin x -$ $- \cos x) = 0 \Leftrightarrow (\sin x - \cos x) \cdot (2\cos x - \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow \sin x -$ $- \cos x = 0$ или $2\cos x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1$ или $\cos x =$ $= \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$ или $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}$.

66. $y = \frac{1}{2}x^2 + x,\ y = 1{,}5x + 3.\ \frac{1}{2}x^2 + x = 1{,}5x + 3 \Leftrightarrow x^2 +$ $+ 2x = 3x + 6 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ или $x = 3$.

$$S = \int_{-2}^{3}\left((1{,}5x + 3) - \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\right)dx = \int_{-2}^{3}\left(0{,}5x + 3 - \frac{1}{2}x^2\right)dx =$$

$$= \left(\frac{1}{4}x^2 + 3x - \frac{1}{6}x^3\right)\Bigg|_{-2}^{3} = \left(\frac{1}{4} \times \right.$$

$$\left. \times\, 9 + 9 - \frac{1}{6}\cdot 27\right) - \left(\frac{1}{4}\cdot 4 - 6 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{6}\cdot 8\right) = 10\frac{5}{12}.$$

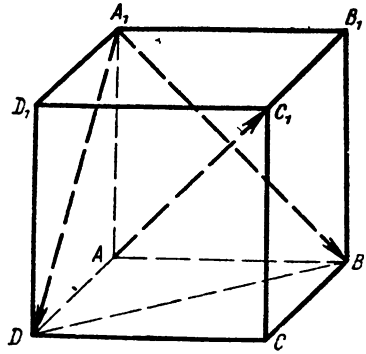


Рис. 27

67. Запишем координаты векторов $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{A_1D}$ и $\overrightarrow{A_1B}$, приняв длину ребра куба за единицу, начало координат в точке A, ось x направим по AB, ось y — по AD, ось z — по AA_1 $\overrightarrow{AC_1}$ (1; 1; 1), $\overrightarrow{A_1D}$ (0; 1; —1), $\overrightarrow{A_1B}$ (1; 0; —1) (рис. 27). Скалярное произведение векторов равно сумме произведений их одноименных координат. Значит, $\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{A_1D} = 1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) = 0$. Следовательно, $\overrightarrow{AC_1} \perp \overrightarrow{A_1D}$. $\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{A_1B} = 1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 1\cdot(-1) = 0$. Следовательно, $\overrightarrow{AC_1} \perp \overrightarrow{A_1B}$. А это и значит, что $\overrightarrow{AC_1} \perp$ пл. (A_1BD).

68. $$\frac{\cos\alpha - 2\cos 3\alpha + \cos 5\alpha}{\sin\alpha + 2\sin 3\alpha + \sin 5\alpha} = \frac{2\cos 3\alpha\cos 2\alpha - 2\cos 3\alpha}{2\sin 3\alpha\cos 2\alpha + 2\sin 3\alpha} =$$

$$= \frac{-2\cos 3\alpha\,(1-\cos 2\alpha)}{2\sin 3\alpha\,(1+\cos 2\alpha)} = -\operatorname{ctg} 3\alpha\cdot\frac{2\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha} = -\operatorname{ctg} 3\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\alpha.$$

$$\operatorname{ctg}(\pi - 3\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha = -\operatorname{ctg} 3\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\alpha,$$

следовательно, $$\frac{\cos\alpha - 2\cos 3\alpha + \cos 5\alpha}{\sin\alpha + 2\sin 3\alpha + \sin 5\alpha} = \operatorname{ctg}(\pi - 3\alpha)\cdot\operatorname{tg}^2\alpha.$$

69. При разложении по формуле Ньютона первый член $(2\times 5^7)^{83}$ и последний $(5\cdot 2^7)^{83}$ уничтожатся с вычитаемым. Так как 83 — число простое, то коэффициенты всех остальных членов разложения будут делиться на 83, а значит, и все выражение разделится на 83.

70. $$\begin{cases} 2xy + yz = 27, \\ 3yz - 2zx = 25, \\ zx - xy = 4. \end{cases}$$

Введем новые переменные: $xy = u$, $yz = v$, $zx = t$. Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} 2u + v = 27 \\ 3v - 2t = 25 \\ t - u = 4 \end{cases} \qquad + \begin{cases} 2u + v = 27 \\ 3v - 2t = 25 \\ 2t - 2u = 8 \end{cases}$$
$$\overline{4v = 60;\ v = 15;}$$

$$2u + 15 = 27;\ u = 6;\ t - 6 = 4;\ t = 10.$$

Значит, $$\begin{cases} xy = 6, \\ yz = 15, \\ zx = 10. \end{cases}$$

Отсюда следует, что все переменные имеют одинаковые знаки. Для нахождения каждой из переменных перемножаем два уравнения и делим на третье:

$\frac{xy \cdot yz}{zx} = \frac{6 \cdot 15}{10}$; $y^2 = 9$; $y = \pm 3$; $\frac{xy \cdot zx}{yz} = \frac{6 \cdot 10}{15}$; $x^2 = 4$; $x = \pm 2$;

$\frac{yz \cdot zx}{xy} = \frac{15 \cdot 10}{6}$; $z^2 = 25$; $z = \pm 5$. Ответ: $x = 2$; $y = 3$; $z = 5$ или $x = -2$, $y = -3$, $z = -5$.

71. $x^2 + 2x + 2\sqrt{x^2 + 2x - 15} = 30$. Обозначим: $\sqrt{x^2 + 2x - 15} = t$, где $t \geqslant 0$. Тогда получим: $t^2 + 2t - 15 = 0$. Откуда $t_1 = -5$ непригоден, $t_2 = 3$. Значит, $\sqrt{x^2 + 2x - 15} = 3$, $x^2 + 2x - 15 = 9$, $x^2 + 2x - 24 = 0$. Откуда $x_1 = -6$, $x_2 = 4$. Ответ: $x = -6$ или $x = 4$.

72. Следует обосновать, что высота вписанной пирамиды и центр шара лежат на высоте описанной пирамиды и что линейный угол данного двугранного угла есть угол, образованный апофемой пирамиды и апофемой основания пирамиды, и центр шара лежит на биссектрисе указанного линейного угла (рис. 28). Решение запишется так:

$|OO_1| = R$, $|O_1E| = \frac{a}{2} = 6$, $\widehat{O_1EO} = \frac{\alpha}{2} = 30°$. $|SO| = 2R$, $|O_1O_2| = x$, $|S_1O_2| = h = 2R - x$,

$$R = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} 30° = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}.$$

$$|A_1B_1| = b, \ |A_1O_2| = \frac{1}{2}|A_1C_1| = \frac{b}{\sqrt{2}}.$$

$$\begin{cases} \left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 = x \cdot (2R - x) \\ \frac{b}{2} = (2R - x) \cdot \operatorname{ctg} 60° \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b^2}{2} = x \cdot (2R - x) \\ \frac{b}{2} = \frac{2R - x}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\frac{(2R - x)^2}{3} = x(2R - x) \\ b = 2 \cdot \frac{2R - x}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4R}{5} = \frac{8}{5}\sqrt{3} \\ b = 4\frac{4}{5}. \end{cases}$$

$$h = 4\sqrt{3} - \frac{8}{5}\sqrt{3} = \frac{12}{5}\sqrt{3};$$

$$v = \frac{1}{3}b^2h = \frac{1}{3} \cdot \frac{576}{25} \cdot \frac{12\sqrt{3}}{5} = 18{,}432\sqrt{3}.$$

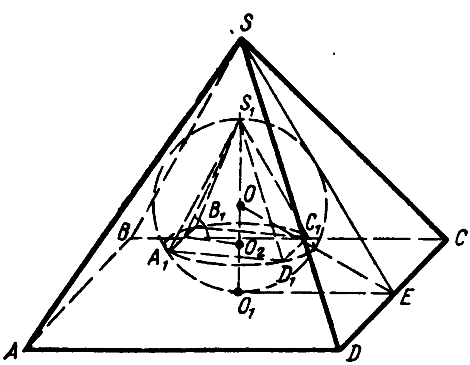


Рис. 28

73. Преобразуем выражение функции $y=\frac{3x+7}{x+2}=\frac{3(x+2)+1}{x+2}=\frac{1}{x+2}+3.$ График можно получить преобразованием графика $y=\frac{1}{x}$ параллельным переносом влево на две единицы и вверх на три единицы.

74. $x^{12}-28x^6+47=0$; $x^6=y$; $y^2-28y+27=0$; $y_1=1$; $y_2=27$; $x^6=1$; $x^6=27$. Для решения такого уравнения полезно использовать единичный круг (рис. 29). Корни второго уравнения получаются из корней первого умножением их на $\sqrt[6]{27}=\sqrt{3}$.

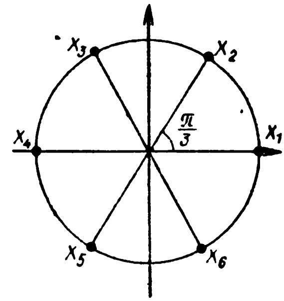


Рис. 29

$x^6=1$, $x_1=1$, $x_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $x_3=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $x_4=-1$, $x_5=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $x_6=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$. $x^6=27$, $x_7=\sqrt{3}$, $x_8=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$, $x_9=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$, $x_{10}=-\sqrt{3}$, $x_{11}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$, $x_{12}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$.

75. 11 088 — это 110% изделий в декабре по сравнению с ноябрем. Значит, в ноябре изготовили 11 088 : 1,10 = 10 080 изделий, что составляет 105% по сравнению с октябрем. Значит, в октябре изготовили 10 080 : 1,05 = 9600 изделий, что составляет 120% по сравнению с сентябрем. Следовательно, в сентябре изготовили 9600 : 1,20 = 8000 изделий.

76. $x=30$.

77. 6 лошадей и 40 коров — 472 кг.
12 лошадей и 37 коров — 514 кг.

Увеличим данные первой строки в два раза. Получим:

12 лошадей и 80 коров — 944 кг,
12 лошадей и 37 коров — 514 кг.

Значит, на 43 коровы в день отпускают 430 кг, а на одну корову — 10 кг. На 40 коров — 400 кг. Следовательно, на 6 лошадей отпускают 472 — 400 = 72 кг сена, а на одну лошадь — 12 кг. С 15 октября по 25 марта будет 164 дня. На 30 лошадей и 90 коров потребуется $(12\cdot 30+10\cdot 90)\cdot 164=206\,640$ кг, или 206 т 640 кг сена.

78. Меньшее число содержит все делители, из которых состоит НОД, и еще множитель 5. Значит, оно равно $8\cdot 5=40$. В большем числе, кроме 8 и 5, будет еще $240:(8\cdot 5)=6$. Следовательно, оно равно $8\cdot 6=48$.

79. Сумма фруктов четырех ящиков, оставшихся после продажи одного ящика, должна делиться на 4. Значит, это фрукты 2, 3, 4 и 5-го ящиков. В них всего $105+110+115+130=460$ штук.

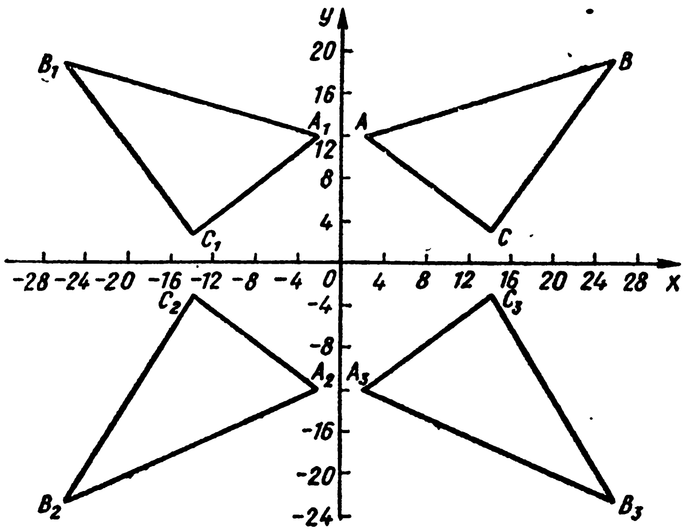


Рис. 30

Следовательно, лимонов будет: 460 : 4 = 115 штук. Это фрукты 4-го ящика. Апельсинов осталось 345 штук.

80. Примем остаток полотна каждого цвета за x м. С другой стороны, остатки полотна составляют $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ часть красного, $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ часть синего, $1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ часть черного. Значит, всего было красного $x:\frac{1}{2}=2x$ м, синего $x:\frac{1}{3}=3x$ м, черного $x:\frac{1}{4}=4x$ м, а всего $2x+3x+4x=9x$, что по условию равно 675 м. Следовательно, $x=675:9=75$. Отсюда красного полотна было $75\cdot 2=150$ м, синего $75\cdot 3=225$ м и черного $75\cdot 4=$ $=300$ м.

81. —10.

82. Построение показано на рисунке 30. Длины сторон будут $|AB|=\sqrt{(26-2)^2+(19-12)^2}=25$; $|AC|=$ $=\sqrt{(14-2)^2+(3-12)^2}=15$; $|BC|=\sqrt{(26-14)^2+(3-19)^2}=20$.

83. $|AB|=|BC|\Rightarrow\widehat{BAC}=\widehat{BCA}$ (рис. 31).

$$\left.\begin{aligned}\widehat{ABE}&=90^\circ-\widehat{EBD}\\ \widehat{CBD}&=90^\circ-\widehat{EBD}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ \widehat{ABE}=\widehat{CBD}.\ \text{Значит, }\triangle ABE\cong\triangle BCD.$$

84. Велосипедист ехал со скоростью $5+4=9$ км/ч столько времени, сколько шли до встречи его товарищи. Оба они за час проходили 9 км. Значит, всего в пути были $36:9=4$ ч. За это время велосипедист проехал $9\cdot 4=36$ км.

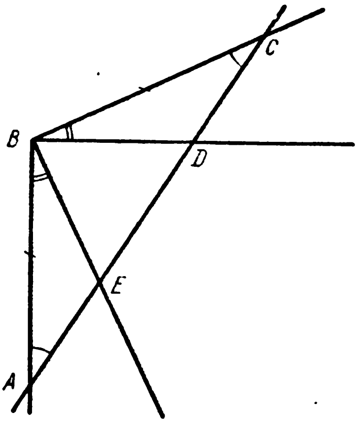


Рис. 31

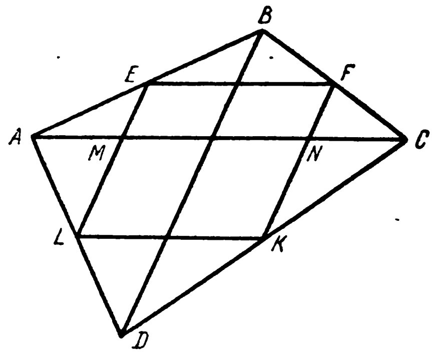


Рис. 32

85. $S_{\triangle EBF} = \frac{1}{2} \cdot |EF| \cdot h_1$, $S_{EFNM} = |EF| \cdot h_2$, $h_1 = h_2$ (рис. 32). Следовательно, $S_{\triangle EBF} = \frac{1}{2} \cdot S_{EFNM}$. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 2 \times \times |EF| \cdot 2h_1 = 4 \cdot S_{\triangle BEF}$, следовательно, $S_{\triangle ABC} = 2 \cdot S_{EFNM}$. Аналогично $S_{\triangle ADC} = 2 \cdot S_{MNKL}$. Сложив эти равенства, получим: $S_{ABCD} = 2 \cdot (S_{EFMN} + S_{MNKL})$, $S_{ABCD} = 2 \cdot S_{EFKL}$. Следовательно, $S_{EFKL} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABCD}$.

86. При $a = 0$ уравнение имеет бесконечное множество решений: x — любое действительное число, не равное нулю. При $x = -a$ уравнение не имеет решений. При $a \neq 0$ и $x \neq -a$ уравнение имеет единственное решение: $x = 10 - a$.

87.
$$\left(1 + \frac{1}{a^2}\right) - \left(\frac{2}{a} - \frac{11}{25a^2} + \frac{2}{5a}\right) = \frac{a^2+1}{a^2} - \frac{50a - 11 + 10a}{25a^2} =$$
$$= \frac{25a^2 + 25 - 50a + 11 - 10a}{25a^2} = \frac{25a^2 + 36 - 60a}{25a^2} = \frac{(5a-6)^2}{25a^2} > 0,$$
следовательно, $1 + \frac{1}{a^2} > \frac{2}{a} - \frac{11}{25a^2} + \frac{2}{5a}$.

88. Получился квадрат, так как это четырехугольник, полудиагонали которого равны и взаимно перпендикулярны (рис. 33).

89. Выбрать предлагается второму или третьему рыбаку. Тогда он возьмет пакет наибольшего веса. Другой из этих двоих в худшем случае возьмет пакет среднего веса, т. е. не менее 1 кг 780 г. Оставшийся пакет достанется первому рыбаку, а он считает все пакеты весом 1 кг 780 г. Значит, требование будет выполнено.

90. I. x. II. $x + 12$. III. $2(2x + 12)$. $(x + 12) \cdot x - 2 \cdot (2x + 12) = 104 \Leftrightarrow x^2 + 8x - 128 = 0 \Leftrightarrow x = -4 \pm \sqrt{16 + 128} = -4 \pm 12$. $x > 0$, $x = 8$, $x + 12 = 20$; $2 \cdot (2x + 12) = 56$.

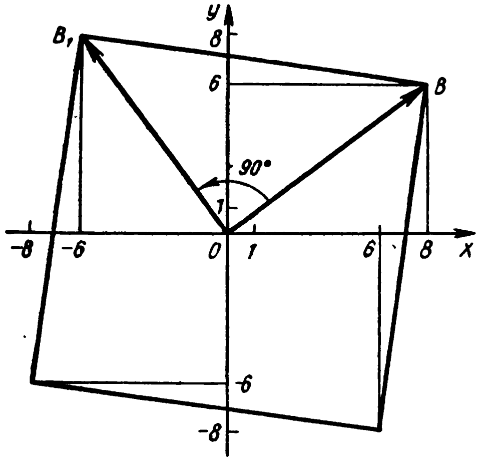


Рис. 33

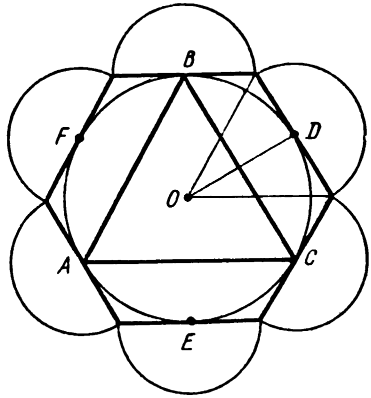


Рис. 34

91. $S = S_6 + 6 \cdot S_{\frac{1}{2}\text{кр.}} = S_6 + 3 \cdot S_{\text{кр.}}$ (рис. 34). $S_{\text{кр.}} = \pi r^2$, $r = \frac{a_6}{2}$; $a_6 = 2R \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$, $a_3 = R\sqrt{3}$; $R = \frac{a_3}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$; $a_6 = 8$, $r = 4$. $S_{\text{кр.}} = 16\pi$, $S_6 = 6 \cdot \frac{a_6^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{64\sqrt{3}}{4} = 96\sqrt{3}$, $S = 96\sqrt{3} + 48\pi = 48(2\sqrt{3} + \pi)$. Ответ: $S = 48(2\sqrt{3} + \pi)$ см^2.

92. $x^2 + 55x - 45 = 0$. Следовательно, $x_1 + x_2 = -55$, $x_1x_2 = -45$. В общем виде искомое уравнение запишется так: $y^2 + py + q = 0$, где $p = -(y_1 + y_2)$, $q = y_1y_2$.

По условию $y_1 = \frac{1}{x_1^2}$, $y_2 = \frac{1}{x_2^2}$, значит,

$$p = -\left(\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}\right) = -\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 x_2^2} = -\frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2} = -\frac{3115}{2025};$$

$$q = y_1y_2 = \frac{1}{(x_1x_2)^2} = \frac{1}{2025}.$$ Отсюда имеем уравнение

$$y^2 - \frac{3115}{2025}y + \frac{1}{2025} = 0, \quad 2025y^2 - 3115y + 1 = 0.$$

93. Ясно, что ни одна из переменных не равна нулю. Поэтому переменные можно найти, складывая два уравнения и вычитая из полученной суммы третье уравнение. Получаем:

$$\begin{cases}\dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{8}{3}\\ \dfrac{yz}{y+z}=\dfrac{12}{5}\\ \dfrac{zx}{z+x}=\dfrac{24}{7}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{8}\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{5}{12}\\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{7}{24}\end{cases}$$

$$\frac{2}{y}=\frac{3}{8}+\frac{5}{12}-\frac{7}{24}\Leftrightarrow y=4,\quad \frac{2}{z}=\frac{5}{12}+\frac{7}{24}-\frac{3}{8}\Leftrightarrow z=6;\qquad x=8.$$

Ответ: $x=8$, $y=4$, $z=6$.

94. 10^{2n-2} представимо в виде суммы числа, составленного из $2n-2$ девяток, и единицы. Сумма этого числа с числом 2 делится на 3. Число 10^{3n-3} представимо в виде суммы числа, составленного из $3n-3$ девяток, и единицы. Его сумма с числом $2^3=8$ делится на 3. Оба слагаемых делятся на 3. Следовательно, их сумма делится на 3.

95. Отношение второго члена последовательности к первому равно $\frac{60}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}:30=\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$. Каждый последующий может быть получен из предыдущего умножением на число $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$, которое меньше 1. Например, третий член будет равен $\frac{60}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\times$ $\times\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{120(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{((\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2)^2}=\frac{120(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{4}=30(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2$.

Значит, данная последовательность является бесконечно убывающей геометрической прогрессией. Поэтому ее сумма равна $s=$ $=\frac{a_1}{1-q}$; $a_1=30$, $q=\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\sqrt{5}-\sqrt{3}$; $s=\frac{30}{1-\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

96. $|x^2+3x|=|2x-6|$. Корни функции, стоящей в левой части уравнения, равны 0 и -3. Корень правой части равен 3. Вся ось x разбивается корнями на 4 промежутка: а) $]-\infty, -3]$; б) $]-3;0]$; в) $]0;3]$; г) $]3;\infty[$.

Рассматриваем решение уравнения на каждом промежутке отдельно. а) $]-\infty;-3]$. Без знака модуля на этом промежутке уравнение запишется: $x^2+3x=-2x+6\Leftrightarrow x^2+5x-6=0\Leftrightarrow x=$ $=-6$ или $x=1$. $x_1=1$ не принадлежит промежутку. Следовательно, $x=-6$. б) $]-3;0]$; $x^2+3x=2x-6\Leftrightarrow x^2+x+6=0$, $D<0$, $\varnothing$. в) $]0;3]$; $x^2+3x=-2x+6\Leftrightarrow x^2+5x-6=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x=-6$ или $x=1\Leftrightarrow x=1$. г) $]3;\infty[$; $x^2+3x=2x-6\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2+x+6=0$; $D<0$, $\varnothing$. Ответ: $x=-6$ или $x=1$.

97. Введем обозначения $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\widehat{BAC}=\alpha$ (рис. 35). Тогда $S=\frac{1}{2}\cdot|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\sin\alpha$; $\cos\alpha=\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$.

$x_1=x_B-x_A=6$; $y_1=y_B-y_A=6\sqrt{3}$; $x_2=x_C-x_A=4\sqrt{3}$; $y_2=y_C-y_A=4$.

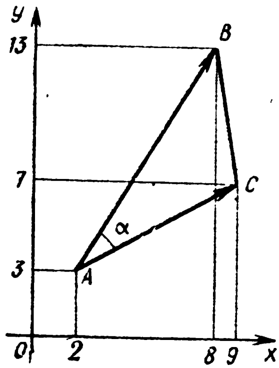


Рис. 35

$$\cos\alpha=\frac{6\cdot4\sqrt{3}+6\sqrt{3}\cdot4}{\sqrt{6^2+(6\sqrt{3})^2}\cdot\sqrt{(4\sqrt{3})^2+4^2}}=$$
$$=\frac{48\sqrt{3}}{\sqrt{144}\cdot\sqrt{64}}=\frac{\sqrt{3}}{2};\ \alpha=\frac{\pi}{6};\ \sin\alpha=\sin\frac{\pi}{6}=$$
$$=\frac{1}{2};\ |\vec{b}|=8;\ |\vec{c}|=12;\ S=\frac{1}{2}\cdot8\cdot12\times$$
$$\times\ \frac{1}{2}=24.$$

98. $1+a+a^2+a^3+\ldots+a^x=$
$$=\frac{1-a^{x+1}}{1-a}.$$

При $a\neq1$ $(1+a)(1+a^2)(1+$
$+a^4)\ldots(1+a^{32})=$

$$=\frac{(1-a)(1+a)(1+a^2)(1+a^4)\ldots(1+a^{32})}{1-a}=$$
$$=\frac{(1-a^2)(1+a^2)(1+a^4)\ldots(1+a^{32})}{1-a}=\ldots=\frac{1-a^{64}}{1-a};\quad\frac{1-a^{x+1}}{1-a}=$$
$$=\frac{1-a^{64}}{1-a};\ 1-a^{x+1}=1-a^{64};\ a^{x+1}=a^{64};\ x+1=64;\ x=63.$$

При $a=1$ $1+a+\ldots+a^x=x+1;$

$(1+a)(1+a^2)(1+a^4)\ldots(1+a^{32})=2^6;\ x+1=2^6;\ x=63.$

Ответ: $x=63$.

99. Справедливость формулы докажем методом математической индукции. 1) При $n=1$ в левой части получается 1. Правая часть равенства равна $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}=\frac{1\cdot2\cdot3}{6}=1$. Формула верна.

2) Пусть при $n=k$ формула верна, т. е. $1+3+\ldots+\frac{k(k+1)}{2}=$
$=\frac{k\cdot(k+1)(k+2)}{6}$. Докажем ее справедливость для $n=k+1$.

$$1+3+\ldots+\frac{k(k+1)}{2}+\frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}=\frac{k(k+1)\cdot(k+2)}{6}+$$
$$+\frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}=\frac{(k+1)\cdot(k+2)}{6}\cdot(k+3)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}.$$

Формула верна. Оба положения принципа математической индукции доказаны. Следовательно, справедливость формулы доказана для всех натуральных n.

100. Область допустимых значений переменной $3x^2-5x-$
$-12\geqslant0;\ 3x^2-5x-12=0\Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{25+144}}{6}=\frac{5\pm13}{6}\Leftrightarrow x=$
$=-1\frac{1}{3}$ или $x=3$. $x\leqslant-1\frac{1}{3}$ или $x\geqslant3$. Решение. $3x^2+$
$+5\sqrt{3x^2-5x-12}=48+5x\Leftrightarrow3x^2-5x-12+5\sqrt{3x^2-5x-12}-$
$-36=0;\ \sqrt{3x^2-5x-12}=y;\ y\geqslant0;\ y^2+5y-36=0\Leftrightarrow y=$

$= \frac{-5 \pm \sqrt{25+144}}{2} = \frac{-5 \pm 13}{2} \Leftrightarrow y = -9$ или $y = 4$. Следовательно, $y = 4$. Значит, $\sqrt{3x^2 - 5x - 12} = 4 \Leftrightarrow 3x^2 - 5x - 12 = 16, \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3x^2 - 5x - 28 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25+336}}{6} = \frac{5 \pm 19}{6} \Leftrightarrow x = -2\frac{1}{3}$ или $x = 4$. Ответ: $\left\{-2\frac{1}{3};\ 4\right\}$.

101. $\sin^2 x \cdot \sin 2x + \cos^2 x \cdot \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1-\cos 2x}{2} \cdot \sin 2x + \frac{1+\cos 2x}{2} \cdot \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x - \cos 2x \sin 2x + \cos 2x + \cos^2 2x = 1 \Leftrightarrow (\sin 2x + \cos 2x) - \sin 2x(\sin 2x + \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow (\sin 2x + \cos 2x) \cdot (1 - \sin 2x) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x + \cos 2x = 0$ или $1 - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \operatorname{tg} 2x = -1$ или $\sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$ или $2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} n$ или $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, где $n, k \in Z$.

102. Боковые ребра пирамиды одинаково наклонены к основанию. Поэтому высота проектируется в центр описанной около основания окружности (рис. 36). Эта окружность — сечение сферы плоскостью основания пирамиды. Отсюда центр сферы лежит на высоте пирамиды или на ее продолжении. Проведем $(OK) \perp (MA)$. Рассмотрим треугольник MKO: $\widehat{KMO} = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$, $|MO| = R$, $|MK| = \frac{1}{2} \cdot |MA|$, $|MK| = |MO| \cdot \cos \widehat{KMO} = R \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = R \sin 2\alpha$, $|MA| = 2R \sin 2\alpha$.

Рассмотрим $\triangle AMO_1$: $|MO_1| = H$, $|MO_1| = |AM| \cdot \sin \widehat{MAO_1} = |AM| \sin 2\alpha = 2R \sin 2\alpha \sin 2\alpha = 2R \sin^2 2\alpha$; $H = 2R \sin^2 2\alpha$; $|AO_1| = r$, $|AO_1| = |AM| \times \cos \widehat{MAO_1} = 2R \sin 2\alpha \cos 2\alpha = R \sin 4\alpha$, $r = R \sin 4\alpha$.

Проведем $(O_1D) \perp (AC)$, $|AD| = \frac{1}{2}|AC|$, $\widehat{DAO_1} = \frac{\alpha}{2}$, $|AD| = |AO_1| \cos \widehat{DAO_1}$, $|AD| = r \cos\frac{\alpha}{2} = R \sin 4\alpha \cos\frac{\alpha}{2}$, $|AC| = 2R \sin 4\alpha \cos\frac{\alpha}{2}$. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times |AC| \cdot |AB| \cdot \sin \widehat{CAB} = \frac{1}{2}\left(2R \sin 4\alpha \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 \cdot \sin \alpha$.

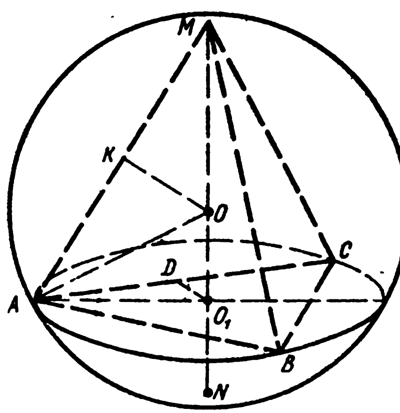


Рис. 36

$$V = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4R^2 \sin^2 4\alpha \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin\alpha \times$$
$$\times 2R \cdot \sin^2 2\alpha; \; V = \frac{4}{3} R^3 \sin^2 4\alpha \cdot \sin^2 2\alpha \cdot \sin\alpha \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

103. $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}} = \sqrt{1980}$. Обозначим: $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}} = y$. Получим: $y = \sqrt{1980}$. С другой стороны, все корни без первого тоже будут равны y. Отсюда $\sqrt{xy} = \sqrt{1980}$, т. е. $xy = 1980$, $x\sqrt{1980} = 1980$. Следовательно, $x = \sqrt{1980}$.

104. К концу 1-й единицы времени $H = y = 8$, $\operatorname{tg}\alpha = y' = x$. Из уравнения $y = \frac{1}{2}x^2$ имеем: $x = \sqrt{2y}$. Значит, к концу 2-й единицы времени жук опустится на $\sqrt{16} = 4$. Его высота будет: $8 - 4 = 4$ см. За третью единицу времени он поднимется на 8 см. $H = y = 12$. За 4-ю единицу времени опустится на $\sqrt{2y} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$. За 5-ю единицу времени поднимется на 8 см до $y = H = (20 - 2\sqrt{6})$ см. За 6-ю единицу опустится на $\sqrt{2y} = 2\sqrt{10 - \sqrt{6}}$ см. Его высота будет: $(20 - 2\sqrt{6} - 2\sqrt{10 - \sqrt{6}})$ см. За 7-ю единицу времени поднимется до высоты $y = H = (28 - 2\sqrt{6} - 2\sqrt{10 - \sqrt{6}})$ см. За 8-ю единицу времени опустится на $\sqrt{2y} = 2\sqrt{14 - \sqrt{6} - \sqrt{10 - \sqrt{6}}}$ см. Его высота будет: $y = (28 - 2\sqrt{6} - 2\sqrt{10 - \sqrt{6}} - 2\sqrt{14 - \sqrt{6} - \sqrt{10 - \sqrt{6}}})$ см. В конце 9-й единицы времени $y = (36 - 2\sqrt{6} - 2\sqrt{10 - \sqrt{6}} - 2\sqrt{14 - \sqrt{6} - \sqrt{10 - \sqrt{6}}})$ см, а $x = \sqrt{2y} = 2\sqrt{18 - \sqrt{6} - \sqrt{10 - \sqrt{6}} - \sqrt{14 - \sqrt{6} - \sqrt{10 - \sqrt{6}}}}$ см.

105. Пусть скорость встречного поезда равна x км/ч. Тогда мимо пассажира первого поезда он проходит со скоростью $60 + x$ км/ч. Следовательно, он пройдет за $\frac{120}{1000 \cdot (60 + x)}$ ч, что по условию равно $\frac{4}{3600}$ ч. Итак, $\frac{120}{1000 \cdot (60 + x)} = \frac{4}{3600}$; $108 = 60 + x$; $x = 48$ км/ч.

106. $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = x^3 + 3 \cdot 2 \cdot x^2 + 3 \cdot 4x + 8 - x - 2 = (x + 2)^3 - (x + 2) = (x + 2)((x + 2)^2 - 1) = (x + 2) \cdot (x + 2 + 1) \cdot (x + 2 - 1) = (x + 2) \cdot (x + 3) \cdot (x + 1)$.

107. Выделим из выражения $43x + 75y$ максимально возможное число слагаемых: $3x + 7y$; $43x + 75y = 10 \cdot (3x + 7y) + 13x + 5y = 10(3x + 7y) + 13x + 5y - 19(x + y) + 19(x + y) = 10(3x + 7y) - 6x - 14y + 19(x + y) = 10(3x + 7y) - 2(3x + 7y) + 19(x + 4) = 8(3x + 7y) + 19(x + y)$ Каждое слагаемое делится на 19, значит, и результат $43x + 75y$ делится на 19.

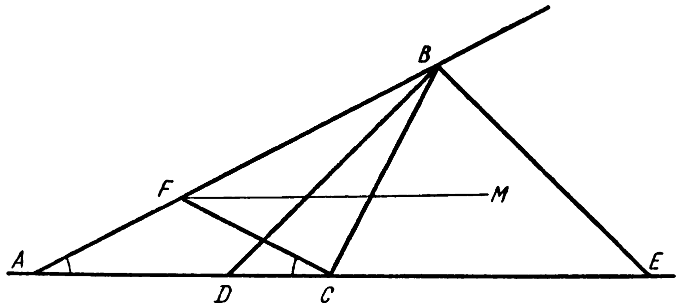


Рис. 37

108. Проведем FC так, что $\widehat{FCA} = \widehat{FAC}$ (рис. 37). Тогда $\widehat{FCB} = 90°$. $(FM) \parallel (AE)$. Значит, $\widehat{BFC} = 2 \cdot \widehat{BAC}$. Отсюда $2 \cdot \widehat{BAC} + 2 \cdot \widehat{DBC} = 90°$, т. е. $\widehat{BAC} + \widehat{DBC} = 45°$, $\widehat{DBC} = 45° - \widehat{BAC}$; $\widehat{ACB} = 90° + \widehat{BAC}$. Тогда $\widehat{BDC} = 180° - (\widehat{ACB} + \widehat{DBC}) = 180° - (90° + \widehat{BAC} + 45° - \widehat{BAC}) = 45°$. Так как $\widehat{DBE} = 90°$, то $\widehat{BED} = 45°$, т. е. $\widehat{BDE} = \widehat{BED} = 45°$ и, следовательно, $|BD| = |BE|$.

109.
$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} *** \\ *** \end{array} \\ \hline *0** \\ **5 \\ *1** \\ \hline *****8 \end{array}$$

В первом неполном произведении последняя цифра 8, во втором 5. Это возможно только, если последняя цифра первого множителя 1, а второй оканчивается на 58. Так как второе неполное произведение трехзначно, то первая цифра первого множителя 1. Далее, в первом неполном произведении может получиться при умножении первого множителя на 8 вначале только 10. Значит, при умножении второй цифры в уме осталось 2. Это возможно только, если вторая цифра первого множителя 3. В третьем неполном произведении получилось больше, чем в первом. Значит, первая цифра второго множителя больше последней. Следовательно, она равна 9. Таким образом, первый множитель 131, а второй 958. В процессе рассуждений полезно воспроизводить получающиеся результаты.

110. Пусть $|AB| = x$ (рис. 38), скорости v_1 и v_2. Тогда имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{x-40}{v_1} = \dfrac{40}{v_2} \\ \dfrac{x-40+20}{v_2} = 8 \\ \dfrac{x+40-20}{v_1} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1x - 40v_2 = 40v_1 \\ x - 20 = 8v_2 \\ x + 20 = 8v_1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

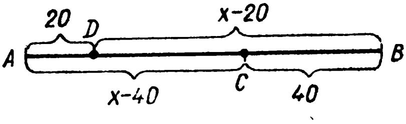


Рис. 38

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_2 x = 40 \cdot (v_1 + v_2) \\ 2x = 8\,(v_1 + v_2) \\ x - 20 = 8v_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{v_2}{\cdot 2} = 5 \\ x = 20 + 8 \cdot 10 \\ 100 + 20 = 8v_1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_2 = 10 \\ x = 100 \\ v_1 = 15. \end{cases}$$

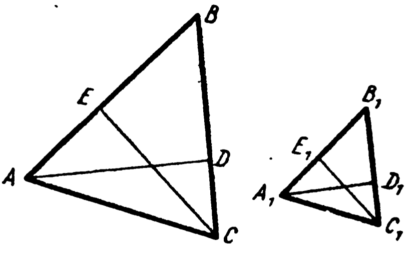


Рис. 39

111. $p^2 - 1 = (p-1) \cdot (p+1)$. Так как p — простое число, то $p-1$ и $p+1$ — два последовательных четных числа. Значит, одно из них делится на 2, а другое — на 4, т. е. произведение делится на 8. Далее рассмотрим три числа $p-1$, p, $p+1$. Это три последовательных натуральных числа. Значит, одно из них кратно трем. Но p — простое число, большее трех. Оно не может делиться на 3. Поэтому либо $p-1$, либо $p+1$ делится на 3. Следовательно, $p^2 - 1$ делится на два взаимно простых числа 8 и 3. Значит, оно делится на их произведение.

112. $\widehat{B} = \widehat{B}_1$, $\frac{|AD|}{|A_1D_1|} = \frac{|CE|}{|C_1E_1|}$ (рис. 39). Следовательно, $\triangle ABD \sim \triangle A_1B_1D_1$ и $\frac{|AD|}{|A_1D_1|} = \frac{|AB|}{|A_1B_1|}$. $\triangle BEC \sim \triangle B_1E_1C_1$. Следовательно, $\frac{|BC|}{|B_1C_1|} = \frac{|EC|}{|E_1C_1|}$. Так как $\frac{|AD|}{|A_1D_1|} = \frac{|EC|}{|E_1C_1|}$, то $\frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|BC|}{|B_1C_1|}$. Значит, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

113. Область D определения данной системы $x \neq -y$; $x \neq -z$; $y \neq -z$. Тогда в D имеем:

$$\begin{cases} \frac{xy}{x+y} = 1 - z \\ \frac{yz}{y+z} = 2 - x \\ \frac{zx}{z+x} = 2 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = x + y - zx - zy \\ yz = 2y + 2z - xy - zx \\ zx = 2z + 2x - zy - xy \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy + zx + zy = x + y \\ yz + xy + zx = 2\,(y + z) \\ zx + zy + xy = 2\,(z + x) \end{cases}$$

Сложим два последних уравнения и вычтем из этой суммы удвоенное первое. Получим: $0 = 2z$. Откуда $z = 0$. Последняя система будет эквивалентна системе

$$\begin{cases} z = 0 \\ x = 2y \\ xy = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$$

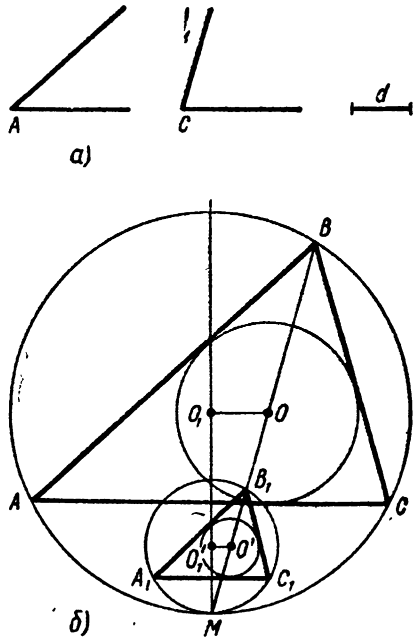


Рис. 40

114. По двум данным углам (рис. 40, *а*) построим треугольник $A_1B_1C_1$, подобный данному. Впишем в него окружность и опишем окружность (рис. 40, *б*). O' лежит на биссектрисе угла B_1, которая делит дугу A_1C_1 пополам. O_1' лежит на серединном перпендикуляре к A_1C_1, который также делит дугу A_1C_1 пополам. Пусть M — середина дуги A_1C_1. Выполним параллельный перенос $\overrightarrow{O'O_1'}$ так, чтобы в результате было $|\overrightarrow{OO_1}| = d$ и при этом O и O_1 остались на указанном перпендикуляре и на биссектрисе угла B_1. Затем из точки O_1 радиусом $R = |\overrightarrow{O_1M}|$ опишем окружность. Ее пересечение с биссектрисой $O'M$ даст вершину B искомого треугольника. Проведя из нее прямые, параллельные A_1B_1 и B_1C_1, получим искомый треугольник. Построение всегда возможно и единственно, если сумма данных углов меньше π.

115. $a = -(b + c)$, $a^3 + b^3 + c^3 = -(b + c)^3 + b^3 + c^3 = -b^3 - 3b^2c - 3bc^2 - c^3 + b^3 + c^3 = -3bc(b + c) = 3abc$.

116. $ax + by = ab$. Первое слагаемое делится на a и сумма делится на a. Значит, и второе слагаемое делится на a. Но a и b взаимно просты. Следовательно, на a должно делиться y. Тогда $y = d \cdot a$, где $d \in N$. Получаем: $ax + bad = ab$, откуда $x + bd = b$, что невозможно, так как $x + bd > b$.

117. Надо вынуть шарик из ящика с надписью «Черный и белый». В нем не может быть шариков разных цветов. Значит, если вынули белый, то в нем 2 белых шарика. Тогда в ящике с надписью «2 белых» лежат два черных шарика, а в ящике с надписью «2 черных» лежат шарики разного цвета. Аналогично, если вынем черный шарик.

118. Пусть первого сплава взяли x г. Тогда второго будет $(840 - x)$ г. Чистого никеля в первом сплаве $\frac{x \cdot 5}{100}$ г, во втором $\frac{(840 - x) \cdot 40}{100}$ и в новом сплаве $\frac{840 \cdot 30}{100}$. Отсюда имеем: $\frac{5x}{100} + \frac{40(840 - x)}{100} = \frac{840 \cdot 30}{100} \Leftrightarrow x + 8(840 - x) = 840 \cdot 6 \Leftrightarrow -7x = -2 \times$

$\times 840 \Leftrightarrow x = 240$. Ответ: Первого сплава надо взять 240 г, а второго 600 г.

119. Обозначим данное выражение через $x(n)$; $x(n) = 5^{2n+1} + 3^{n+2} \cdot 2^{n-1}$. Докажем утверждение методом математической индукции. Проверим справедливость утверждения для $n = 1$. $x(1) = 5^3 + 3^3 \cdot 2^0 = 125 + 27 = 152 \cdot 152$ делится на 19.

Пусть утверждение верно для $n = k$, т. е. $x(k) = 5^{2k+1} + 3^{k+2} \cdot 2^{k-1}$ делится на 19. Докажем, что $x(k+1)$ делится на 19. $x(k+1) = 5^{2(k+1)+1} + 3^{(k+1)+2} \cdot 2^{(k+1)-1} = 5^{2k+1} \cdot 5^2 + 3^{k+3} \cdot 2^k$; $5^{2k+1} = x(k) - 3^{k+2} \cdot 2^{k-1}$. Следовательно, $x(k+1) = (x(k) - 3^{k+2} \cdot 2^{k-1}) \cdot 25 + 3^{k+3} \cdot 2^k = x(k) \cdot 25 - 3^{k+2} \cdot 2^{k-1} \cdot 25 + 3^{k+3} \cdot 2^k = x(k) \cdot 25 - 3^{k+2} \cdot 2^{k-1} \cdot (25 - 3 \cdot 2) = x(k) \cdot 25 - 3^{k+2} \cdot 2^{k-1} \cdot 19$. И уменьшаемое, и вычитаемое делятся на 19. Значит, и разность, равная $x(k+1)$, делится на 19. Тем самым утверждение доказано для любого $n \in \boldsymbol{N}$.

120. Положим на весы из первой стопки одну монету, из второй — две и т. д., из десятой стопки — 10 монет, всего 55 монет. Если бы все монеты были настоящие, то вес 55 монет выразился бы числом, кратным 55, т. е. был бы равен $55k$, где $k \in \boldsymbol{N}$. Если он больше $55k$, например, на m г, где $1 \leqslant m \leqslant 10$, $m \in \boldsymbol{N}$, то фальшивые монеты тяжелее истинных и лежат в стопке с номером m; если он меньше $55k$ на n г, то фальшивые монеты легче истинных и лежат в стопке с номером n.

121. Натуральные числа, оканчивающиеся на 1981, запишутся в виде $x \cdot 10\,000 + 1981$, где $x \in \boldsymbol{N}$. После вычеркивания четырех последних цифр получится число x. По условию $\frac{x \cdot 10\,000 + 1981}{x} = n$, где $n \in \boldsymbol{N}$. Отсюда $10\,000 + \frac{1981}{x} = n$. Значит, $\frac{1981}{x}$ должно быть натуральным числом, т. е. x — делитель числа 1981. Число 1981 имеет своими делителями числа 1, 7, 283, 1981. Следовательно, имеем 4 числа: 11 981, 71 981, 2 831 981, 19 811 981.

122. Пусть данные точки M, N, K (рис. 41). По трем точкам можно построить единственную окружность. Точка O — центр этой окружности. Она будет описана около искомого треугольника ABC. Ее радиус $|OM|$. Точка N пересечения биссектрисы с окружностью лежит на середине дуги AC. Через эту же точку проходит диаметр, перпендикулярный хорде AC. Диаметр проводим через точки O и N. Высота треугольника параллельна проведенному диаметру. Через M проводим прямую $(MB) \parallel (ON)$. Получили вершину B. Проведя BK, в пересечении с ON получим середину основания треугольника D. Через D проводим прямую $(AC) \perp (ON)$. Точки ее пересечения с окружностью и будут двумя другими вершинами искомого треугольника ABC. Проверкой убеждаемся, что этот треугольник удовлетворяет условию задачи.

123. $|AD| = |DB|$; $|CE| = |EB|$; $(CD) \perp (AE)$ (рис. 42). $|CD| = 18$, $|AE| = 24$, $|AO| = \frac{2}{3} \cdot |AE| = 16$, $|CO| = \frac{2}{3} \cdot |DC| = 12$.

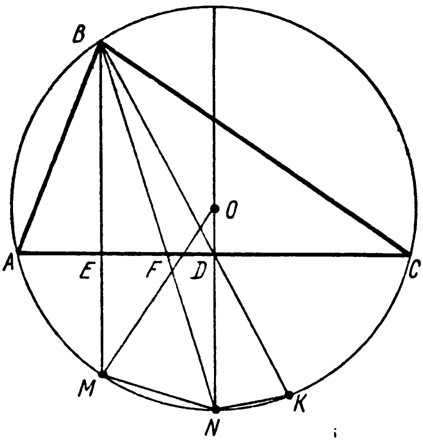


Рис. 41

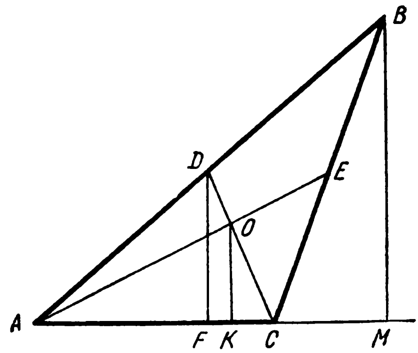


Рис. 42

В $\triangle AOC$ $\widehat{AOC} = 90°$, $|AC| = \sqrt{|AO|^2 + |OC|^2} = 20$. Проводим $(DF) \perp (AC)$, $(OK) \perp (AC)$, $(BM) \perp (AC)$. Найдем $|OK| = h_1$. $S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} \cdot |AO| \cdot |OC|$. С другой стороны, $S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} \times$ $\times |OK| \cdot |AC|$. Следовательно, $|AO| \cdot |OC| = |OK| \cdot |AC|$, или $16 \cdot 12 = h_1 \cdot 20$, $h_1 = \frac{16 \cdot 12}{2} = 9{,}6$. $\frac{|DF|}{|OK|} = \frac{3}{2}$; $|DF| = h_2$, $h_2 = \frac{3}{2} \cdot h_1 = \frac{3}{2} \cdot 9{,}6 = 14{,}4$; $|BM| = h$, $|BM| = 2\,|DF|$, $h =$ $= 2h_2 = 28{,}8$; $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BM| = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 28{,}8 =$ $= 288$. Ответ: $S_{\triangle ABC} = 288$ см^2.

124. Обозначим $\frac{19n + 17}{7n + 11} = k$, где $k \in \boldsymbol{N}$, $n \in \boldsymbol{N}$. Отсюда $19n +$ $+ 17 = 7kn + k$, $n(19 - 7k) = 11k - 17$. Значит, либо

$\begin{cases} 19 - 7k > 0, \\ 11k - 17 > 0, \end{cases}$ либо $\begin{cases} 19 - 7k < 0, \\ 11k - 17 < 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} 19 - 7k > 0 \\ 11k - 17 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k < 2\frac{5}{7} \\ k > 1\frac{6}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \quad k = 2 \text{ и } \frac{19n + 17}{7n + 11} = 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 19n + 17 = 14n + 22 \Leftrightarrow n = 1.$$

$$\begin{cases} 19 - 7k < 0 \\ 11k - 17 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > 2\frac{5}{7} \\ k < 1\frac{6}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing.$$

Ответ: $n = 1$.

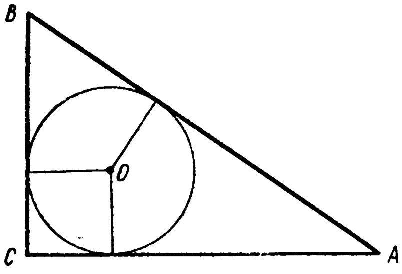


Рис. 43

125. $\sqrt{\underbrace{111\ldots1}_{2n}-\underbrace{222\ldots2}_{n}}=$

$=\sqrt{\underbrace{111\ldots1}_{n}\cdot(\underbrace{100\ldots1}_{n+1}-2)}=$

$=\sqrt{\underbrace{111\ldots1}_{n}\cdot\underbrace{999\ldots9}_{n}}=$

$=\sqrt{9\cdot(\underbrace{111\ldots1}_{n})^2}=3\cdot\underbrace{111\ldots1}_{n}=$

$=\underbrace{333\ldots3}_{n},\ \underbrace{333\ldots3}_{n}=\underbrace{333\ldots3}_{n}.$

126. Впишем в данный треугольник окружность (рис. 43). Пусть стороны треугольника a, b, c, а радиус окружности r. Тогда $b=\frac{a+c}{2}$, $S=\frac{1}{2}ab$, $S=pr=\frac{a+b+c}{2}\cdot r=\frac{3br}{2}$.

Следовательно, $ab=3br$, $a=3r$, $r=\frac{a}{3}$.

Найдем b и c, выразив их через r:

$$\begin{cases} b=\frac{a+c}{2} \\ c^2=a^2+b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{a+c}{2} \\ c^2=a^2+\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{a+c}{2} \\ 4c^2=4a^2+a^2+2ac+c^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{a+c}{2} \\ 3c^2-2ac-5a^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{a+c}{2} \\ c=\frac{a\pm\sqrt{a^2+15a^2}}{3}=\frac{a\pm4a}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{a+\frac{5a}{3}}{2}=\frac{3r+5r}{2}=4r \\ c=\frac{5}{3}a=5r \end{cases}$$

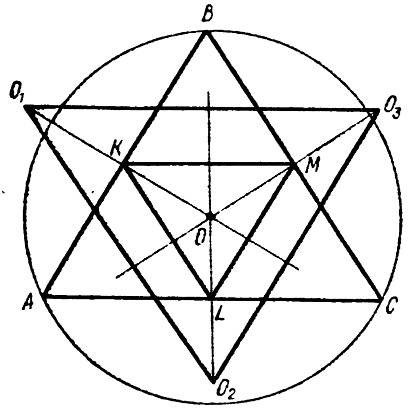


Рис. 44

Таким образом, $a=3r$, $b=4r$, $c=5r$, т. е. a, b, c составляют арифметическую прогрессию с разностью r.

127. Анализ. Предположим, что задача решена (рис. 44). O_1, O_2, O_3 — данные точки, O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. В этом случае треугольник KLM подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $k=\frac{1}{2}$. Треугольник KLM гомотетичен треугольнику $O_1O_2O_3$ с коэффициентом гомотетии $\frac{1}{2}$. Отсюда $\triangle O_1O_2O_3 \cong \triangle ABC$. Причем $(O_1O_2) \parallel (BC)$, $(O_2O_3) \parallel (AB)$, $(O_1O_3) \parallel (AC)$. Следовательно, точка O является точкой пересечения высот треугольника $O_1O_2O_3$. Отсюда построение. Строим высоты в треугольнике $O_1O_2O_3$. O — точка пересечения этих высот. Через середины отрезков OO_1, OO_2, OO_3 проводим перпендикуляры к этим отрезкам до их взаимного пересечения в точках A, B, C. Получаем искомый треугольник ABC.

128. Докажем справедливость формулы методом математической индукции. При $n=1$ имеем: $\frac{1+1}{2\cdot 1-1}=2^1$, $2=2$. Формула верна.

Пусть формула верна для $n=k$, т. е.

$$\frac{(k+1)(k+2)\ \dots\ (2k-1)\cdot 2k}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ \dots\ \cdot(2k-1)}=2^k.$$

Докажем ее справедливость для $n=k+1$.

$$\frac{(k+2)(k+3)\ \dots\ (2k-1)\cdot 2k\cdot(2k+1)\cdot(2k+2)}{1\cdot 3\cdot 5\ \dots\ (2k-1)(2k+1)}=$$

$$=\frac{(k+2)(k+3)\ \dots\ (2k-1)\cdot 2k\cdot(2k+1)\cdot 2(k+1)}{1\cdot 3\cdot 5\ \dots\ (2k-1)\cdot(2k+1)}=$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)\ \dots\ (2k-1)\cdot 2k}{1\cdot 3\cdot 5\ \dots\ (2k-1)}\cdot\frac{(2k+1)\cdot 2}{2k+1}=$$

$$=2^k\cdot 2=2^{k+1}.$$

Оба положения принципа математической индукции доказаны. Утверждение полностью доказано.

129. $$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\ \dots\ +\frac{n}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\ \dots\ +$$

$$+\frac{n}{2^n}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ \dots\ +\frac{1}{2^n}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ \dots\ +\frac{1}{2^n}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ \dots\ +\frac{1}{2^n}\right)+\ \dots\ +\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{\frac{1}{8}-\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\ \dots\ +\frac{\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{4}-$$

$$-\frac{1}{2^n}+\ \dots\ +\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ \dots\ +\frac{1}{2^{n-2}}\right)-$$

$$-\frac{1}{2^n}(n-2)=\frac{1-\frac{1}{2^{n-2}}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n-2}{2^n}=2-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{n-2}{2^n}=\frac{2^{n+1}-n-2}{2^n}.$$

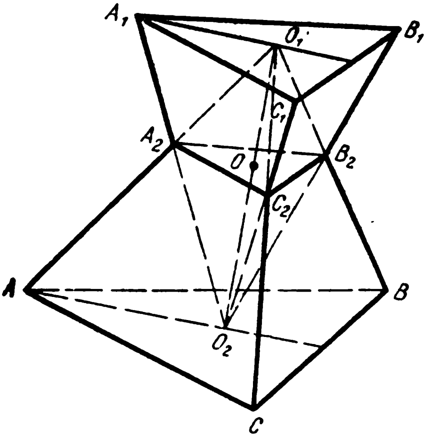


Рис. 45

130. Обозначим высоту пирамиды (рис. 45) через h, а сторону основания одной пирамиды a, а второй b. В пересечении получится две правильные треугольные пирамиды. Высота одной h_1, а другой $h - h_1$, сторона основания a_1. Тогда искомый объем

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a_1^2 \sqrt{3}}{4} \cdot h_1 + \frac{1}{3} \frac{a_1^2 \sqrt{3}}{4} \times (h - h_1) = \frac{1}{3} \frac{a_1^2 \sqrt{3}}{4} h.$$

Обозначим ребро $|A_2O_1| = x$, $\widehat{AO_1O_2} = \alpha$, $\widehat{A_1O_2O_1} = \beta$, $\frac{x}{\sin\beta} = \frac{h}{\sin(\alpha+\beta)}$;

$x = \frac{h \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$; $h_1 = x\cos\alpha = \frac{h\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. $\frac{a_1}{a} = \frac{h_1}{h}$; $a_1 = \frac{ah_1}{h}$; $a = R\sqrt{3}$;

$R = l\sin\alpha$; $a = l\sqrt{3}\sin\alpha$; $a_1 = \frac{l\sqrt{3}\sin\alpha \cdot h\cos\alpha\sin\beta}{h \cdot \sin(\alpha+\beta)}$.

$a_1 = \frac{l\sqrt{3}\sin\alpha\sin\beta \cdot \cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$, $h = l\cos\alpha$. $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3l^2\sqrt{3}\sin^2\alpha\sin^2\beta \cdot l\cos^3\alpha}{4\sin^2(\alpha+\beta)} = \frac{1}{16} l^3 \sqrt{3} \frac{\sin^2 2\alpha \cos\alpha \sin^2\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}$.

131. Обозначим $|DO_2| = m$, $|EO_2| = n$, $|O_1C| = r$, $|OA| = R$, $|O_2F| = x$, $|OO_1| = R + r$ (рис. 46).

$$\begin{matrix} \Delta OKO_1 \\ \Delta ODO_2 \\ \Delta O_2EO_1 \end{matrix} \left\{ \begin{aligned} &(R + r)^2 = (m + n)^2 + (R - r)^2 \\ &(R + x)^2 = (R - x)^2 + m^2 \\ &(r + x)^2 = (r - x)^2 + n^2 \end{aligned} \right. \Leftrightarrow$$

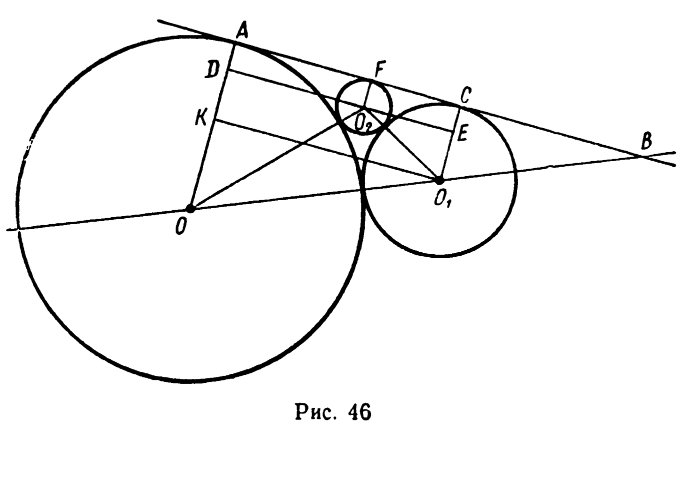


Рис. 46

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R^2 + 2Rr + r^2 = m^2 + 2mn + n^2 + R^2 - 2Rr + r^2 \\ R^2 + 2Rx + x^2 = R^2 - 2Rx + x^2 + m^2 \\ r^2 + 2rx + x^2 = r^2 - 2rx + x^2 + n^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m + n)^2 = 4Rr \\ 4Rx = m^2 \\ 4rx = n^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4Rr = (\sqrt{4Rx} + \sqrt{4rx})^2,\ 4Rr = 4x(\sqrt{R} + \sqrt{r})^2,\ x = \frac{Rr}{(\sqrt{R} + \sqrt{r})^2}.$$

132. Область допустимых значений переменных $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$.

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = 8 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 22 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = -\dfrac{z}{xy} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)((x + y)^2 - 3xy) + z^3 = 8 \\ (x + y)^2 - 2xy + z^2 = 22 \\ \dfrac{x + y}{xy} + \dfrac{1}{z} = -\dfrac{z}{xy} \end{cases}$$

Введем новые переменные $x + y = u$, $xy = v$.

$$\begin{cases} u(u^2 - 3v) + z^3 = 8 \\ u^2 - 2v + z^2 = 22 \\ \dfrac{u}{v} + \dfrac{1}{z} = -\dfrac{z}{v} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -\left(z + \dfrac{v}{z}\right) \\ -\left(z + \dfrac{v}{z}\right)\left(z^2 + 2v + \dfrac{v^2}{z^2} - 3v\right) + z^3 = 8 \\ z^2 + 2v + \dfrac{v^2}{z^2} - 2v + z^2 = 22 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = -\left(z + \dfrac{v}{z}\right) \\ -z^3 - \dfrac{v^2}{z} + zv - vz - \dfrac{v^3}{z^3} + \dfrac{v^2}{z} + z^3 = 8 \\ 2z^4 + v^2 = 22z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -\left(z + \dfrac{v}{z}\right) \\ -\dfrac{v^3}{z^3} = 8 \\ 2z^4 - 22z^2 + v^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = -2z \\ u = -(z - 2) \\ 2z^4 - 22z^2 + 4z^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 - 9 = 0 \\ v = -2z \\ u = 2 - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 \\ v = -6 \\ u = -1 \end{cases} \text{ или}$$

$$\begin{cases} z = -3 \\ v = 6 \\ u = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 \\ x + y = -1 \\ xy = -6 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} z = -3 \\ x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 \\ x = 2 \\ y = -3 \end{cases} \text{ или}$$

$$\begin{cases} z = 3 \\ x = -3 \\ y = 2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} z = -3 \\ x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} z = -3 \\ x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

133. $S_{\triangle AMC} = S_{\triangle BMC}$, т. е. $\frac{h_b \cdot b}{2} = \frac{h_a \cdot a}{2}$, где $h_a = |MD|$, $h_b = |ME|$ (рис. 47). Значит, $\operatorname{tg} \widehat{K_1CA} = \operatorname{tg} \widehat{K_1AC}$. Следовательно, $\widehat{K_1CA} = \widehat{K_1AC}$. Поэтому $|CK_1| = |AK_1|$. И аналогично $|BK_1| = |CK_1|$, т. е. $[CK_1]$ — медиана. $S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot b \cdot |CM| \times \sin \widehat{K_1CA} = \frac{1}{2} b \cdot |CM| \cdot \sin \widehat{A} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot |CM| \cdot \frac{a}{c} = \frac{ab \cdot |CM|}{2c}$.

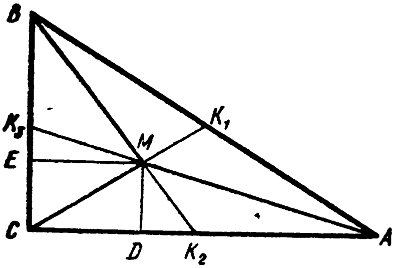


Рис. 47

Аналогично $S_{\Delta BMC} = \frac{ab \cdot |CM|}{2c}$, и из условия следует, что $S_{\Delta AMB} = \frac{ab \cdot |CM|}{2c}$. Тогда $S_{\Delta ABC} = \frac{3ab \cdot |CM|}{2c}$. С другой стороны, $S_{\Delta ABC} = \frac{ab}{2}$. Отсюда $\frac{3ab \cdot |CM|}{2c} = \frac{ab}{2}$, $\frac{3 \cdot |CM|}{c} = 1$, $c = 3 \cdot |CM|$, $2 \cdot |CK| = 3 \cdot |CM|$, $|CM| = \frac{2}{3} \cdot |CK|$, т. е. M — точка пересечения медиан треугольника ABC. $|BM| = \frac{2}{3} \cdot |BK_2|$, $|AM| = \frac{2}{3} \cdot |AK_2|$. Медианы можно вычислить по формуле $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)-3a^2}$, но $a^2+b^2=c^2$, т. е. $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{4c^2-3a^2}$. $5 \cdot |MC|^2 = 5 \cdot \left(\frac{2}{3}m_c\right)^2 = \frac{5}{9}c^2$; $|MA|^2 + |MB|^2 = \left(\frac{2}{3}m_a\right)^2 + \left(\frac{2}{3}m_b\right)^2 = \frac{4}{9}\left(\frac{1}{4}(4c^2-3a^2) + \frac{1}{4}(4c^2-3b^2)\right) = \frac{1}{9} \cdot 5c^2 = \frac{5}{9}c^2$ и $5 \cdot |MC|^2 = \frac{5}{9}c^2$. Значит, $5 \times |MC|^2 = |MB|^2 + |MA|^2$.

134. Значения x, при которых $\sin\frac{\pi x}{9} = 0$ не удовлетворяют уравнению, а потому считаем $\sin\frac{\pi x}{9} \neq 0$. Умножим обе части уравнения на $2\sin\frac{\pi x}{9}$. Получим:

$$\sin\frac{2\pi x}{9} \cdot \cos\frac{2\pi x}{9} \cdot \cos\frac{4\pi x}{9} = \frac{1}{4}\sin\frac{\pi x}{9} \Leftrightarrow \sin\frac{4\pi x}{9}\cos\frac{4\pi x}{9} = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi x}{9} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin\frac{8\pi x}{9} = \sin\frac{\pi x}{9} \Leftrightarrow \sin\frac{8\pi x}{9} - \sin\frac{\pi x}{9} = 0 \Leftrightarrow 2\cos\frac{\pi x}{2} \cdot \sin\frac{7\pi x}{18} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi x}{2} = 0 \text{ или } \sin\frac{7\pi x}{18} = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \boldsymbol{N}, \text{ или}$$
$$\frac{7\pi x}{18} = \pi k, \; k \in \boldsymbol{N} \Leftrightarrow x = 1 + 2n, \quad n \in \boldsymbol{N}, \text{ или } x = \frac{18k}{7}, \; k \in \boldsymbol{N}.$$

135. Применяем последовательно формулу косинуса половинного угла, начиная с последнего радикала, $\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\alpha}{2}}{2}} = \cos\frac{\alpha}{2^2}$.

Получаем: $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}}} =$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}}}} = \ldots = \cos\frac{\alpha}{2^{n+1}}.$$

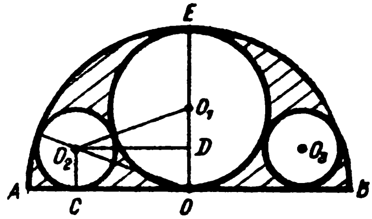


Рис. 48

136. Покажем, что данное выражение делится на каждый из множителей делителя, например на $x - y$. Действительно $(x-y)^5$ делится на $x - y$. Сумма нечетных степеней $(y-z)^5 + (z-x)^5$ делится на сумму оснований $(y - z) + (z - x) = y - x$, т. е. на $y - x$. Следовательно, все выражение делится на $y - x$. Аналогично доказывается делимость данного выражения на два других множителя. Сумма делится на каждый из трех множителей. Эти множители взаимно просты. Значит, она делится на их произведение.

137. $S = \frac{1}{2} S_{\text{кр.}} - (S_{\text{кр. }1} + 2S_{\text{кр. }2})$; $S_{\text{кр.}} = \pi R^2$, где $R = |AO|$ (рис. 48). $S_{\text{кр. }1} = \pi R_1^2 = \frac{\pi R^2}{4}$, так как $R_1 = |OO_1| = \frac{R}{2}$. $S_{\text{кр. }2} = \pi r^2$. $(O_2C) \perp (AB)$, $|OC| = x$, $|O_2C| = r$, $|O_2O| = R - r$, $|O_2O_1| = \frac{R}{2} + r$.

$$\begin{array}{l} \triangle O_2OC \\ \triangle O_2O_1D \end{array} \left\{ \begin{array}{l} (R-r)^2 = r^2 + x^2, \\ \left(\frac{R}{2} + r\right)^2 = \left(\frac{R}{2} - r\right)^2 + x^2. \end{array} \right.$$

Решая систему, получим: $r = \frac{1}{4} R$. Следовательно, $S_{\text{кр. }2} = \frac{1}{16} \pi R^2$. $S = \frac{1}{2} \pi R^2 - \left(\frac{\pi R^2}{4} + 2 \cdot \frac{1}{16} \pi R^2\right) = \frac{1}{8} \pi R^2$.

138. Если бы число диагоналей было нулевым, то многоугольник «разбился» бы на один многоугольник (он сам) и он был бы покрашен снаружи. Проведем первую диагональ (рис. 49) и окрасим ее с одной из сторон. Ясно, что один из двух полученных многоугольников (M) будет весь окрашен снаружи. Когда мы проведем вторую диагональ, то она либо не пересечет многоугольник M вообще, либо разделит его на два, из которых один снова будет окрашен снаружи. Итак, после проведения каждой новой диагонали получаем, что окрашенный снаружи многоугольник либо разбивается на два, из которых один снова окрашен снаружи, либо новая диагональ вообще его не пересекает. Тогда он же будет окрашен только снаружи и после ее проведения. Так мы проведем одну за другой все диагонали. После их проведения у нас останется многоугольник, окрашенный снаружи. Утверждение доказано.

139. Сначала докажем, что точка O пересечения диагоналей прямоугольника $PQRS$ (рис. 50) совпадает с центром квадрата. В самом деле, $|QO| = |OS|$. Поэтому точка O лежит на средней линии MN квадрата. Точно так же она лежит и на KL. Следовательно, точка O лежит в точке пересечения KL и MN, т. е. совпадает с центром квадрата.

Отметим, что $|PO| = |QO| = |RO| = |SO|$. Проведем окружность с центром в точке O радиусом $|PO|$. Эта окружность пересечет

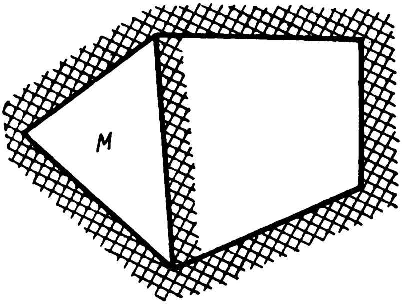


Рис. 49

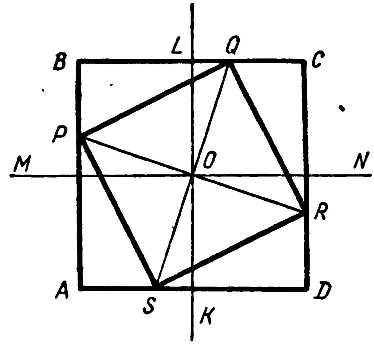


Рис. 50

квадрат в восьми точках (по две на каждой стороне): P', P, Q', Q, R', R, S', S (рис. 51). Соединяя эти точки, можно получить прямоугольники $PQ'RS'$ и $PQRS$. Ясно, что четырехугольник $PQ'RS'$ обладает тем свойством, что его стороны параллельны диагоналям квадрата $ABCD$, четырехугольник $PQRS$ — квадрат. Аналогично можно рассмотреть четырехугольники $P'Q'R'S'$ и $P'QR'S$.

140. Среди первых 20 чисел найдутся два, у которых на конце стоит нуль. Из них хотя бы у одного перед нулем стоит не девятка. Пусть N — это число, n — сумма его цифр. Тогда числа N, $N+1$, $N+2$, ..., $N+9$, $N+19$ имеют суммы цифр n, $n+1$, $n+2$, ..., $n+9$, $n+10$ — одиннадцать последовательных чисел. Поэтому хотя бы одно из них делится на 11.

141. Ясно, что, разложив семь звездочек так, как показано на рисунке 52, мы не можем так вычеркнуть две строки, чтобы не осталось ни одной звездочки. Если бы звездочек было шесть или меньше, то это всегда можно было бы сделать. В самом деле, обозначим через a, b, c, d число звездочек в первом, втором, третьем и четвертом столбцах. Тогда по крайней мере два из чисел a и c не превосходят единицы, так как $a+b+c+d \leqslant 6$. Значит, в двух столбцах стоит не более чем по одной звездочке. Вычеркнем два остальных столбца. Останется не более двух звездочек, которые можно вычеркнуть двумя строками (рис. 53).

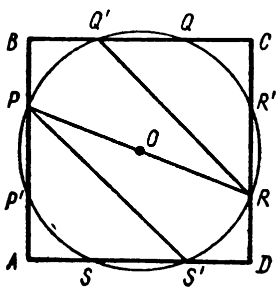


Рис. 51

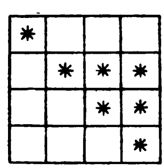


Рис. 52

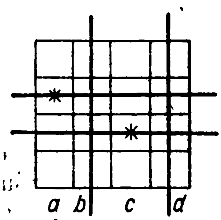


Рис. 53

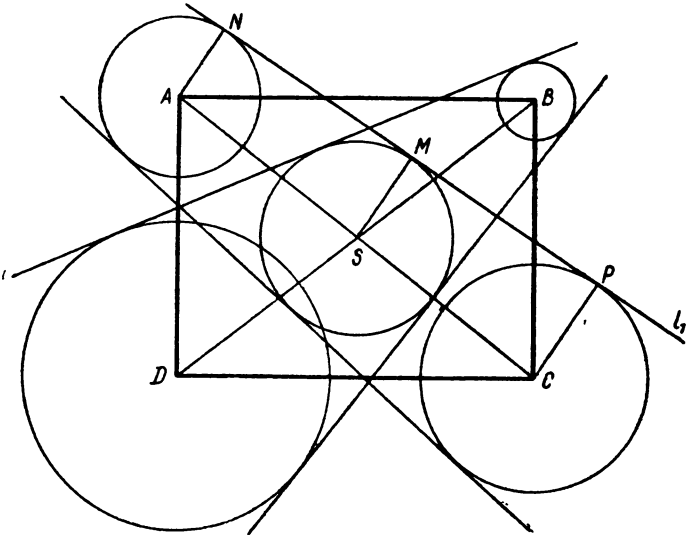


Рис. 54

142. Обозначим через S точку пересечения прямых AC и BD (рис. 54). Пусть l_1 — одна из общих внешних касательных к окружностям A и C; $[SM]$, $[AN]$, $[CP]$ — перпендикуляры к l_1.

Поскольку $(SM) \parallel (AN) \parallel (CP)$ и $|AS| = |SC|$, так как $ABCD$ — прямоугольник, то $|SM| = \frac{|AN| + |CP|}{2}$ как средняя линия трапеции $ANPC$. Итак, $|SM| = \frac{R_A + R_C}{2}$. Очевидно, расстояние от точки S до второй общей внешней касательной также равно $\frac{R_A + R_C}{2}$.

Точно так же получим, что расстояния от точки S до общих касательных к окружностям B и D равны $\frac{1}{2}(R_B + R_D)$. Но по условию $R_B + R_D = R_A + R_C$ и, следовательно, все четыре расстояния равны, т. е. S является центром окружности, вписанной в четырехугольник, образованный касательными.

143. Числа 999 980 и 1 000 019 являются последовательными натуральными числами, сумма цифр которых делится на 11. Разность этих чисел равна 39. Доказательство первой части дано в задаче 140.

144. Прежде всего покажем, что $abcd = 1$. Произведение чисел второй четверки равно $(ab) \cdot (bc) \cdot (cd) \cdot (da) = (abcd)^2$. Произведение чисел третьей четверки будет равно $(abcd)^4$ и т. д. Пусть теперь на каком-то шагу мы снова придем к четверке (a, b, c, d). Тогда мы будем иметь $(abcd)^n = abcd$, и поскольку $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, то необходимо, чтобы $abcd = 1$. Рассмотрим теперь вторую четверку: $(ab,\ bc,\ cd,\ da)$. Произведение $(ab)\cdot(cd)=abcd=1$. Заметим, что эта четверка обладает тем же свойством, что и данная: составляя новые четверки, исходя из этой, мы также получим в конце концов $(ab,\ bc,\ cd,\ da)$. Итак, мы установили, что произведение первого и третьего членов должно быть равно 1. Точно так же равны 1 произведения второго и четвертого членов. Применяя этот результат к исходной четверке, получим: $ac=1$, $bd=1$. Запишем нашу четверку в виде $\left(a,\ b,\ \frac{1}{a},\ \frac{1}{b}\right)$. Если $a=b=1$, то мы доказали то, что требовалось. Если же одно из этих чисел отлично от 1, то выберем среди чисел $a,\ b,\ \frac{1}{a},\ \frac{1}{b}$ наибольшее. Пусть это будет, например, $\frac{1}{a}$. Составим вторую и третью четверти $\left(ab,\ \frac{b}{a},\ \frac{1}{ab},\ \frac{a}{b}\right)$, $\left(b^2,\ \frac{1}{a^2},\ \frac{1}{b^2},\ a^2\right)$. Мы видим, что каждое число третьей четверки равно квадрату одного из чисел первой четверки. Но это означает, что наибольшее число в четверке, которое по предположению не равно единице, больше единицы, увеличивается. Отсюда сразу следует, что мы никогда не придем к первоначальной четверке, ибо наибольшее число должно было быть одновременно и $\frac{1}{a}$, и $\left(\frac{1}{a}\right)^n$, что невозможно, если $\frac{1}{a}>1$. Полученное противоречие оставляет единственную возможность: $a=b=\frac{1}{a}=\frac{1}{b}=1$.

145. Мы будем называть область фигуры n-угольником, если на ее границе лежит n «узлов», т. е. n точек, каждая из которых одновременно принадлежит по крайней мере двум различным отрезкам. В нашем случае фигура содержит 2 четырехугольника и 3 пятиугольника. Рассмотрим особо пятиугольники. Если бы существовала линия, описанная в условии, то она должна бы иметь конец внутри пятиугольника. В самом деле, если бы она не имела конца внутри пятиугольника, то каждый раз, войдя в него, она должна была бы выйти, что невозможно, так как у пятиугольника нечетное число сторон. Итак, внутри каждого пятиугольника линия должна иметь конец. Но у нас имеется три пятиугольника и только два конца. Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

146. Число a не может быть четным, так как

$$a\,(bcd-1)=\underbrace{111\ \dots\ 1}_{1961},$$

а если один из множителей является четным, то и произведение число четное. Так же доказывается из трех других уравнений, что $b,\ c,\ d$ — нечетные. Тогда и их произведение $abcd$ нечетно. Так как числа $a,\ b,\ c,\ d$ и произведение $abcd$ нечетны, то разности $abcd-a$, $abcd-b$, $abcd-c$, $abcd-d$ четны, что противоречит условию. Значит, целых чисел $a,\ b,\ c,\ d$, удовлетворяющих условию задачи, не существует.

147. Рассмотрим не совсем строгое, но изящное решение, опирающееся на чисто физические соображения.

Будем перемещать точку B по окружности O_1 (рис. 55). В каждый момент строим правильный треугольник OBM, где O — центр первой окружности. Точка M опишет окружность, получающуюся из O_1 поворотом около точки O на $60°$.

Закрепим теперь точку B. Этому соответствует некоторое вполне определенное положение M_0 точки M. Будем перемещать A. Вершина C треугольника ABC опишет при этом окружность с центром M_0.

При совместном движении точек A и B точка C движется по окружности, центр которой в свою очередь движется по некоторой окружности. Поскольку периоды обоих движений одинаковы, то в результате точка C опишет окружность, концентричную с окружностью, построенной вначале. Равенство угловых скоростей при этом вполне очевидно.

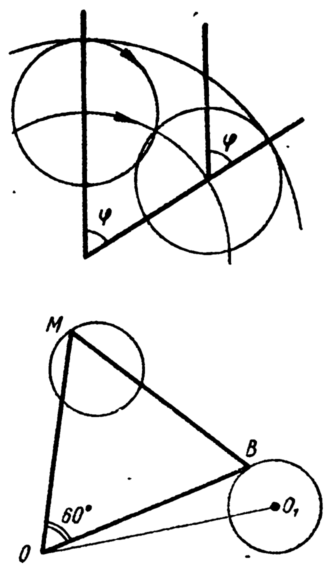


Рис. 55

148. Заметим сначала, что из данной таблицы с помощью операции замены знака может быть получено лишь конечное число таблиц, а именно 2^{mn}. Действительно, в каждой клетке стоит вполне определенное число, меняется лишь знак перед ним, так что для каждой клетки имеется 2 возможности, а для таблицы, имеющей mn клеток, — 2^{mn} возможностей. Пусть теперь T — таблица, сумма всех элементов которой максимальна. Пусть в этой таблице сумма элементов в каком-то столбце отрицательна. Общая сумма чисел, стоящих в остальных столбцах, при этом не изменится, и, следовательно, сумма всех чисел таблицы возрастет вопреки предположению о максимальности этой суммы для таблицы T. Итак, в таблице T сумма чисел всех столбцов и строк (что показывается аналогично) положительна, т. е. таблица T искомая.

149. Пусть НОД чисел b и $p - a$ равен d. Положим тогда $k = \frac{b}{d}$, $l = \frac{p-a}{d}$. Очевидно, k и l взаимно просты. Далее, $ak + bl = a \cdot \frac{b}{d} + (p - a) \cdot \frac{b}{d} = \frac{b}{d} \cdot (a + p - a) = \frac{b}{d} \cdot p$, но d — делитель b, значит, $\frac{b}{d}$ — число целое. Обозначим его r. Тогда $ak + bl = rp$. Утверждение доказано.

150. Из каждой точки нашей схемы выходит несколько отрезков. Покажем, что есть точка, из которой выходит ровно один отрезок. Возьмем любую точку и пойдем из нее по любому пути. Заметим, что каждую точку на нашем пути мы проходим всего один раз, иначе бы существовали замкнутые пути, что невозможно по условию задачи. Всего в нашей схеме конечное число точек. Поэтому рано или поздно мы обнаружим, что дальше двигаться некуда. Поскольку каждую точку мы проходим не более одного раза, то эта конечная точка и является искомой, из нее выходит только один отрезок — тот, по которому мы вошли.

Отбросим теперь эту точку и выходящий из нее отрезок. Число точек, так же как и число отрезков, уменьшится на 1. Продолжая это рассуждение, мы через конечное число шагов придем к схеме, в которой будет уже две точки и один отрезок. Поскольку мы отбросили $n-2$ точки и $n-2$ отрезка, то всего отрезков будет $n-1$, что и требовалось доказать. Остается заметить, что для $n=2$ утверждение очевидно. Две точки соединяет один отрезок.

151. Исследуем первый способ дележа. Пусть на первом этапе Коля делит орехи на две неравные кучки: $2k+m+1$ и $2k-m$, где $2k=n$. Петя может разделить так: $2k+m+1$, $\frac{2k-m}{3}$, $\frac{2k-m}{3}$, $\frac{2k-m}{3}$ и взять себе больше, чем $2k\cdot\frac{4}{3}$ орехов. Таким образом, при наилучшей игре Коли Петя в первом случае получит не менее $\frac{4}{3}n$ орехов.

Исследуем второй способ дележа. Рассуждениями, аналогичными проведенным, можно показать, что при наилучшей игре Коли Петя сможет получить не больше n орехов.

При третьем способе Петя, очевидно, выберет бо́льшую и меньшую части, так как рассмотрение первого случая показало, что этот вариант много выгоднее выбора двух средних частей.

В итоге получаем, что самый выгодный для Пети — первый способ. Самый невыгодный — второй способ дележа.

152. Выберем из последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ подпоследовательность $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}, \ldots$ такую, что $a_{i_1}\leqslant a_{i_2}\leqslant \ldots \leqslant a_{i_n}\leqslant \ldots$. Это можно сделать, так как $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ по условию — последовательность натуральных чисел. Теперь выберем из последовательности $b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_n}, \ldots$ также возрастающую подпоследовательность $b_{j_1}, b_{j_2}, \ldots, b_{j_n}, \ldots$. Соответствующая ей подпоследовательность $a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_n}, \ldots$, очевидно, останется возрастающей. Остается выбрать из последовательности $c_{j_1}, c_{j_2}, \ldots$ $\ldots, c_{j_n}, \ldots$ возрастающую подпоследовательность $c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots$ $\ldots, c_{k_n}, \ldots$. Теперь имеем:

$$a_{k_1}\leqslant a_{k_2}\leqslant \ldots \leqslant a_{k_n}\leqslant \ldots,$$
$$b_{k_1}\leqslant b_{k_2}\leqslant \ldots \leqslant b_{k_n}\leqslant \ldots,$$
$$c_{k_1}\leqslant c_{k_2}\leqslant \ldots \leqslant c_{k_n}\leqslant \ldots .$$

Откуда и следует утверждение задачи.

153. Окружим каждый квадрат полоской шириной $\frac{1}{2}$. Образующиеся фигуры тоже квадраты со стороной, равной $1+2\times$

$\times \frac{1}{2} = 2$, имеют площадь, равную 4. Их общая площадь равна $4 \times 120 = 480$, в то время как площадь основного прямоугольника равна 500. Следовательно, найдется точка, которая не покрыта построенными квадратами, но это значит, что она удалена от данных квадратов не меньше чем на $\frac{1}{2}$ по всем направлениям. Круг радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в этой точке не имеет общих точек ни с одним из квадратов.

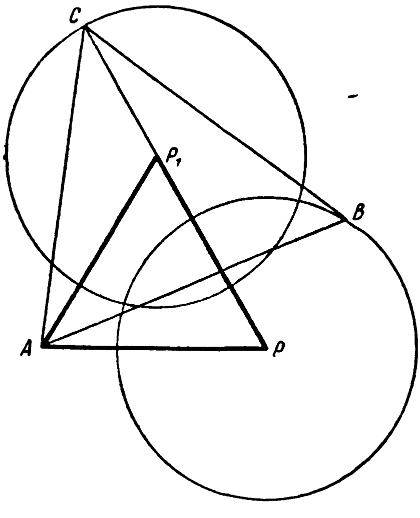


Рис. 56

154. Фиксируем точку A на расстоянии 3 от точки P (рис. 56). Когда точка B движется по окружности радиуса 2 с центром в точке P, то вершина C правильного треугольника ABC также движется по окружности радиуса 2 с центром в вершине P_1 правильного треугольника APP_1. Это можно доказать с помощью поворота против часовой стрелки вокруг точки A на $60°$ точки B и окружности, по которой она движется. При этом получим соответствующее фиксированное положение точки C и окружности, по которой она движется. Но тогда наибольшее расстояние от точки P до этой окружности будет равно сумме PP_1 и радиуса окружности, по которой движется точка C, т. е. это расстояние равно 5.

155. Запишем несколько первых членов исходной цепочки и двух следующих:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots,$$
$$x_1x_2,\ x_2x_3,\ x_3x_4,\ \ldots,$$
$$x_1x_2^2x_3,\ x_2x_3^2x_4,\ \ldots .$$

Поскольку $x_i = \pm 1$, $x_i^2 = 1$, и третья цепочка перепишется так: $x_1x_3,\ x_2x_4,\ \ldots$.

«Шаг» цепочки увеличился вдвое. Еще через одну ступень он увеличится уже вчетверо и т. д., пока, наконец, не достигнет длины, равной половине длины цепочки. В этот момент, начиная с середины, члены в ней будут повторяться, и мы сможем рассмотреть цепочку длины уже не 2^k, а 2^{k-1}. После всех сделанных замечаний доказательство представляется несложной индукцией по k.

156. Очевидно, что исходное число имеет 1967 цифр. Пусть a_1, a_2, a_3, ..., a_{1967} — цифры исходного числа, $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, ..., $\bar{a}_{1967}$ — цифры измененного числа. Предположим, что $a_{1967} + \bar{a}_{1967} = 9$, ..., $a_1 + \bar{a}_1 = 9$. Но сумма цифр исходного и измененного чисел одна и та же. Поэтому $2 \cdot (a_1 + \ldots + a_{1967}) = 9 \cdot 1967$, чего не может быть, так как в правой и левой частях равенства стоят числа разной четности.

157. Опустим из точки M — середины стороны AC — перпендикуляры на стороны BC и AB (рис. 57). $|MK| = \frac{1}{2} \cdot |AH|$, но по условию $|AH| = |BM|$. Значит, $|MK| = \frac{1}{2} \cdot |BM|$. Поэтому угол MBK равен 30°. Точно так же $|LM|$ есть половина высоты, проведенной из вершины C. Так как по условию высота AH наибольшая, то $|ML| < \frac{1}{2} \cdot |AH|$. Значит, $|ML| < \frac{1}{2} \cdot |BM|$. Откуда следует, что угол ABM меньше 30°. Следовательно, угол ABC меньше 60°.

158. Проведем прямую l так, чтобы две из данных точек A_1 и A_2 лежали в одной из получившихся полуплоскостей, а две другие — в другой полуплоскости. Прожектор, расположенный в точке A_1, направим так, чтобы один его луч шел параллельно l по направлению к A_2, а другой — перпендикулярно l и в ту полуплоскость, где расположены точки A_3 и A_4 (рис. 58). Прожектор в A_2 направим так, чтобы один его луч шел параллельно l по направлению к A_1, а другой — перпендикулярно l в ту полуплоскость, где расположены A_3 и A_4. Таким образом, первые два прожектора осветят полуплоскость, в которой расположены точки A_3 и A_4. Аналогично прожекторами, расположенными в A_3 и A_4, осветим всю полуплоскость, в которой расположены точки A_1 и A_2. Таким образом, будет освещена вся плоскость.

159. Такое расположение невозможно. Действительно, рассмотрим числа 0, 1, 2, 8, 9. Никакие два из них не могут стоять рядом. Их пять, следовательно, остальные пять должны стоять по одному между ними. В то же время число 7 может иметь из указанных чисел соседом лишь число 2.

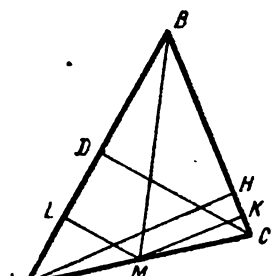


Рис. 57

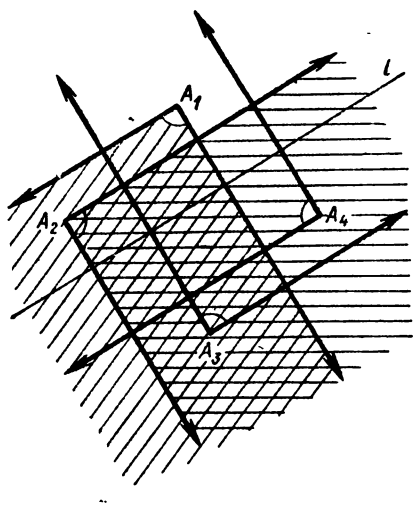


Рис. 58

160. Число 5^{1000} оканчивается не нулем, а цифрой 5. Если в его записи где-то, например на k-м месте с конца, встречается нуль, то к этому числу можно прибавить $5^{1000} \cdot 10^{k-1}$, которое, не изменив последние $(k-1)$ цифр, даст на k-м месте не нуль. Так можно исправить последние 1000 цифр и получить число, делящееся на 5^{1000}, последние 1000 цифр которого не нули. Отбросим теперь все цифры, кроме 1000 последних. Мы отняли от исходного числа число, оканчивающееся 1000 нулями, т. е. делящееся на 5^{1000}. Получившееся число тоже делится на 5^{1000}, и в его записи уже нет нулей.

161. Такое расположение осуществить нельзя. Действительно, рассмотрим шесть чисел: 1, 2, 3, 13, 12, 11. Никакие два из них не могут стоять рядом. Следовательно, в шесть промежутков между ними надо поставить остальные семь чисел. В одном из этих промежутков будет два числа из оставшихся, а в остальных — по одному.

Рассмотрим теперь числа 4 и 10. Каждое из них может иметь лишь по одному соседу из чисел, выбранных первоначально. Следовательно, они оба попадают в тот же промежуток, где стоят два числа, т. е. будут стоять рядом. Но это противоречит условию.

162. Указание. Применить способ, изложенный в решении задачи 156.

163. Докажем предварительно, что если AP и BQ — медианы треугольника ABC, $|AP| < |BQ|$, то $|BC| > |AC|$. Это утверждение следует из формулы, выражающей длину медианы через длины сторон треугольника: $m_a = \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$, которая легко выводится на основе применения теоремы Пифагора, но мы приведем его геометрическое доказательство. Перенесем треугольник ABC параллельно AB так, чтобы Q заняла положение P (рис. 59). Пусть при этом A переходит в A', B — в B', C — в C'. Тогда $|B'P| = |BQ|$, откуда $|AP| < |B'P|$. Следовательно, $|AL| < |B'L|$, где L — проекция точки P на AB. Но $|AA'| = |BB'|$. Следовательно, $|A'L| < |BL|$, откуда $|A'P| < |BP|$. Но тогда $|A'C'| < |BC|$, т. е. $|AC| < |BC|$.

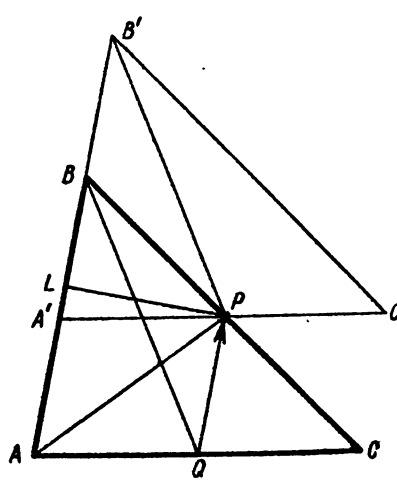


Рис. 59

Кроме того, используем известное утверждение о том, что биссектриса треугольника лежит между медианой и высотой, проведенными из той же вершины. Отсюда следует, что медиана треугольника не меньше биссектрисы, проведенной из той же вершины.

Пусть теперь треугольник ABC удовлетворяет условию задачи. Тогда из задачи 157 следует, что угол ABC не больше 60°. С другой стороны, $[BM]$ — наименьшая из медиан треугольника ABC, так как медиана $|AS| \geqslant |AD| = |BQ|$, где $[AD]$ — биссектриса, $[BQ]$ — медиана, $[CK]$ — высота. Медиана $|CT| \geqslant |CK| = |BQ|$. Следовательно, $[AC]$ — наибольшая из сторон треугольника ABC, а тогда угол ABC не меньше 60°. Следовательно, угол ABC равен 60°, так как это наибольший угол треугольника, то и каждый из двух других углов равен 60°, т. е. треугольник ABC равносторонний.

164. Умножим обе части уравнения на 4 и прибавим к обеим частям 1. Получим: $(2x+1)^2 = 4y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y + 1$. Преобразуем правую часть уравнения: $4y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y + 1 = (2y^2 + y)^2 + 3y^2 + 4y + 1$. Заметим, что корни трехчлена $3y^2 + 4y + 1$ равны -1 и $-\frac{1}{3}$. Значит, при всех целых y, кроме -1, этот трехчлен положителен. Следовательно, при всех целых y, не равных -1, $(2x+1)^2 > (2y^2+y)^2$. Далее $4y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y + 1 = (2y^2 + y + 1)^2 - (y^2 - 2y)$. При всех целых y, кроме $y = 0, 1, 2$, $y^2 - 2y > 0$, так что при целых y, не равных 0, 1, 2, $(2x+1)^2 < (2y^2 + y + 1)^2$. Итак, мы видим, что, за исключением четырех целых значений y, $(2y^2+y)^2 < (2x+1)^2 < (2y^2 + y + 1)^2$. Значит, целочисленные решения уравнения мы можем получить только при значениях y, равных $-1, 0, 1, 2$. Испытаем эти

числа: $y = -1$, $(2x+1)^2 = 1 \Rightarrow x = -1$ или $x = 0$;
$y = 0$, $(2x+1)^2 = 1 \Rightarrow x = -1$ или $x = 0$;
$y = 1$, $(2x+1)^2 = 17$ — нет целых значений x;
$y = 2$, $(2x+1)^2 = 121 \Rightarrow x = -6$ или $x = 5$.

Ответ: $\{(-1, -1), (0; -1), (-1, 0); (0; 0); (-6; 2); (5; 2)\}$.

165. Ясно, что в такой последовательности наибольшим будет один из двух первых ее членов. В последовательности максимальной длины наибольший член должен быть вторым. Действительно, если последовательность начинается с чисел a, b, ..., где $a > b$, то к ней можно присоединить в качестве первого члена еще число $a - b$. Самая длинная последовательность, удовлетворяющая условию, 1966, 1967, 1, 1966, 1965, 1, ... В ней 2952 члена.

Доказательство того, что более длинных последовательностей нет, довольно сложно. Можно поступить так. Докажем по индукции, что последовательность, в которой максимальный член стоит на первом месте и равен n, содержит не более $\left[\frac{3n+1}{2}\right]$ членов. Проверка этого утверждения для $n = 1, 2$ очевидна. Пусть $n \geqslant 2$ и последовательность начинается так: n, k, $n - k$, ...

Рассмотрим два случая: 1) $\frac{n}{2} < k < n$. Тогда в последовательности k, $n - k$, ... наибольший член k. По предположению индукции в ней не больше $\left[\frac{3k+1}{2}\right]$ членов. Отсюда следует, что в первоначальной последовательности не больше

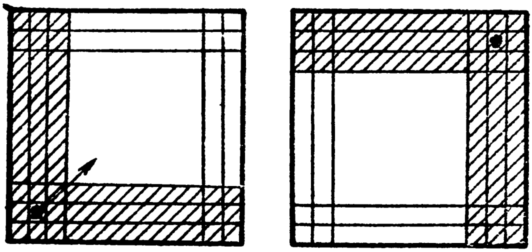
$$\left[\frac{3k+1}{2}\right] + 1 \leqslant \left[\frac{3(n-1)+1}{2}\right] + 1 = \left[\frac{3n}{2}\right] \leqslant \left[\frac{3n+1}{2}\right]$$

членов. 2) $k < \frac{n}{2}$. Тогда наша последовательность продолжается так: $n, k, n-2k, k, \ldots$. Рассмотрим «хвост» нашей последовательности, начинающейся с наибольшего из подчеркнутых чисел. Обозначим это число через m, т. е. $m = n - 2k$ или $m = k$. Этот «хвост» содержит не более $\left[\frac{3m+1}{2}\right]$ членов. Поскольку $m \leqslant n - 2$ и по крайней мере три члена нашей последовательности мы отбросили, число членов первоначальной последовательности не превосходит $\left[\frac{3(n-2)}{2} + 1\right] + 3 = \left[\frac{3n+1}{2}\right]$. Случаи $k = n$ и $k = \frac{n}{2}$ тривиальны. При этом число членов последовательности не больше $3 < \left[\frac{3n+1}{2}\right]$.

Доказательство по индукции закончено. Из доказанного утверждения, очевидно, следует, что последовательность, начинающаяся членами $a, b, \ldots$, где $a < b < 1967$, содержит не более $1 + \left[\frac{3b+1}{2}\right] \leqslant$ $\leqslant \left[\frac{3 \cdot 1967 + 1}{2}\right] = 2952$ члена.

166. Проведем плоскость так, чтобы четыре из данных восьми точек оказались с одной стороны плоскости, а четыре — с другой. Затем проведем плоскость, перпендикулярную первоначальной так, чтобы в каждой части полупространства она отделила по две точки. Это можно сделать, передвигая плоскость параллельно первоначальному положению и вращая вокруг перпендикуляра к первой плоскости. Две плоскости все пространство разделили на четыре части, в каждой части по две точки. Пусть в первой части будут точки A_1 и A_2, во второй A_3 и A_4, в третьей A_5 и A_6, в четвертой A_7 и A_8. Линию пересечения плоскостей назовем l. Прожектор из A_1 направим так, чтобы одно ребро его светового трехгранного угла было параллельно l и направлено в сторону A_2, а два других ребра — перпендикулярными построенным плоскостям. Прожектор из A_2 направим так, чтобы одно из ребер его светового трехгранного угла было параллельно l и направлено в сторону A_1, а два других — перпендикулярны построенным плоскостям. Тогда эти два прожектора осветят всю третью четверть пространства. Аналогично двумя прожекторами второй части пространства осветим четвертую часть пространства, прожекторами третьей части — первую, а прожекторами четвертой части — вторую часть пространства. Таким образом, восемь прожекторов осветят все пространство.

167. Пошлем короля сначала в левый нижний угол доски и затем по диагонали вправо-вверх. Можно считать, что после первого хода короля по диагонали и ответа белых три нижние горизонтали и три левые вертикали свободны от ладей, иначе следующим ходом король сможет стать под удар ладьи (рис. 60, *а*). Таким образом, все ладьи находятся выше и правее короля. Рассмотрим момент, когда король сделал еще 997 ходов по диагонали (рис. 60, *б*) и белые ответили на его последний ход. В этот момент все ладьи должны быть



а) б)

Рис 60

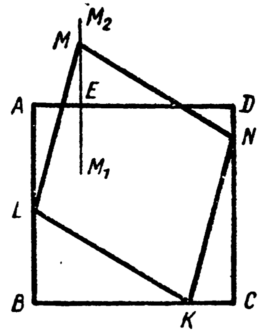


Рис. 61

левее и ниже короля. При этом каждая ладья должна была сделать два хода: поменять вертикаль и горизонталь до того, как на них появится король. Но ладей 499, и они за 997 ходов не успеют передвинуться.

168. Пусть L, K, N — три последовательные вершины ромба $KLMN$, о котором идет речь в условии. Заметим, что если зафиксировать вершину K, лежащую на стороне BC, то вершина M будет расположена на отрезке M_1M_2, параллельном AB и отстоящем от этой прямой на расстоянии $x = |AE| = |KC|$ (рис. 61). Найдем положение концов M_1 и M_2 этого отрезка. Будем считать, что $x \leqslant \frac{1}{2}$ (точки M_i, соответствующие значениям $x > \frac{1}{2}$, получим из соображений симметрии). Очевидно, что нижнее положение точки M соответствует случаю, когда вершина L ромба совпадает с вершиной B квадрата (рис. 62). Тогда $|KC| = |BE| = x$, $|NK| = |BK| = 1 - x$. Следовательно, $|NC| = \sqrt{(1-x)^2 - x^2} = \sqrt{1-2x}$.

Таким образом, точка M_1 лежит на параболе, уравнение которой в системе координат, показанной на рисунке 62, будет: $y = \sqrt{1-2x}$, где $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$.

Верхнее положение точки M_2 соответствует случаю, когда вершина N ромба совпадает с вершиной D квадрата (рис. 63). Опустим перпендикуляр M_2P на AD. Тогда $|AP| = |KC| = x$. Значит, $|LK| = |KD| = \sqrt{1+x^2}$. Следовательно, $|M_2P| = |LB| = \sqrt{1+x^2-(1-x)^2} = \sqrt{2x}$. Значит, $y = |M_2E| = 1 + \sqrt{2x}$.

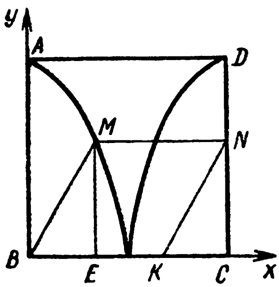


Рис. 62

Таким образом, M_2 лежит на параболе, уравнение которой в системе координат, показанной на рисунке 63, будет: $y = 1 + \sqrt{2x}$, где $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$.

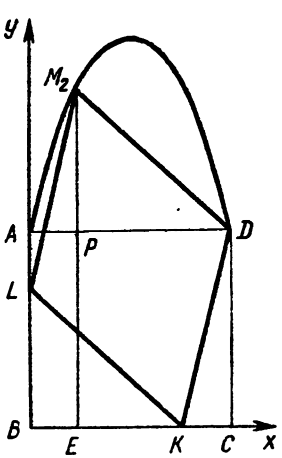


Рис. 63

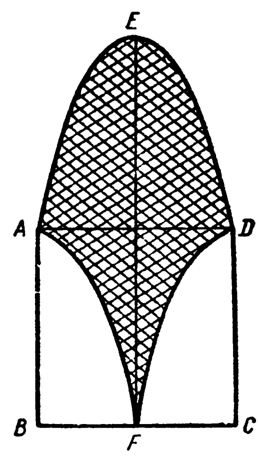


Рис. 64

Итак, все множество точек ограничено четырьмя дугами парабол. На рисунке 64 оно отмечено штриховкой. Если разрезать его по отрезку AD и по оси симметрии EF, то из полученных четырех частей можно сложить целый квадрат, конгруэнтный $ABCD$. Поэтому искомая площадь равна 1.

169. Заметим прежде всего, что число K взаимно просто с 10. Действительно, существует число, которое начинается с цифры 1 и делится на K. Обращенное число, т. е. число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, по условию делится на K и оканчивается на 1. Возьмем далее произвольное число, начинающееся с цифр 500 и делящееся на K. Пусть это будет число $500abc\ldots$ $\ldots z$ ($5, 0, 0, a, b, c, \ldots, z$ — цифры этого числа). Тогда мы можем утверждать, что на K делятся следующие числа: 1) $z\ldots cba005$, 2) сумма

$$\begin{array}{r} z\ldots cba00\,500\ldots\quad 0\\ +\quad 500abc\ldots z\\ \hline z\ldots cba01000abc\ldots z \end{array},$$

3) обращенное последнее число $z\ldots cba00010abc\ldots z$,

4) разность

$$\begin{array}{r} z\ldots cba01000abc\ldots z\\ -\,z\ldots cba00010abc\ldots z\\ \hline 990000\ldots 0 \end{array}$$

Отсюда следует, что и 99 делится на K.

170. Из условия следует, что $1978^n - 1978^m = 1978^m \times$ $\times (1978^{n-m} - 1) = 1000a$, где a — некоторое натуральное число. Отсюда видно, что $m \geqslant 3$; 1978^m должно делиться на 8, а второй множитель — на 125. Найдем $n - m$, при которых $A = 1978^{n-m} -$ $- 1$ делится на 5^3. Легко проверить, что A делится на 5 лишь при $n - m = 4k$. Поскольку нас интересует остаток при делении числа A на 125, можно заменить 1978 на 103, а 103^4 на 6. Далее, $6^k - 1 =$ $= (1 + 5)^k - 1 = k \cdot 5 + \frac{k \cdot (k-1)}{2} \cdot 5^2 + \ldots,$ где опущенные члены делятся на 125. Поэтому k должно делиться на 25. Следовательно, $n - m = 100\,p$, а значит, $n + m = 100p + 2m$. Сумма получится наименьшей при $p = 1$, $m = 3$. Она будет равна 106.

171. Положение трехгранного угла $PABC$ при фиксированном положении его вершины P вполне определяется тремя степенями свободы: углами поворота вокруг его ребер. Проведем плоскость через точки O и P. Это будет плоскость большого круга данного шара. Далее, расположим трехгранный угол $PABC$ так, чтобы ребра PA и PB лежали в проведенной плоскости, а ребро PC было перпендикулярно этой плоскости. При вращении угла $PABC$ вокруг PC точки A и B будут двигаться по окружности полученного большого круга. Четвертая вершина прямоугольника $APBQ'$, лежащего в основании параллелепипеда, будет двигаться по окружности радиуса $|OQ'|$ концентрической окружности большого круга. Для нахождения радиуса этой окружности направим ребро PA по прямой OP (рис. 65). Тогда $|OQ'|^2 = |BQ'|^2 + |BO|^2$, $|BQ'| = |AP|$, $|AP|^2 = |OA|^2 - |OP|^2$. Следовательно, $|OQ'|^2 = |OA|^2 - |OP|^2 + |BO|^2 = 2R^2 - |OP|^2$.

Теперь найдем для данного положения P расстояние $|OQ|$. Из прямоугольного треугольника $OQ'Q$ (рис. 66), имеем: $|OQ|^2 = |OQ'|^2 + |QQ'|^2$. Но $|QQ'| = |PC|$, а $|PC|^2 = |OC|^2 - |OP|^2$. Поэтому $|OQ|^2 = |OC|^2 - |OP|^2 + 2R^2 - |OP|^2 = 3R^2 - 2\,|OP^2|$. Заметим, что все три степени свободы равноправны. С их помощью трехгранный угол всегда можно привести в рассматриваемое положение. При этом расстояние точки Q от центра шара не изменится. Значит, при фиксированном положении точки P внутри данной сферы точка Q будет находиться на сфере, концентрической данной и имеющей радиус $|OQ| = \sqrt{3R^2 - 2\,|OP|^2}$. Точка Q

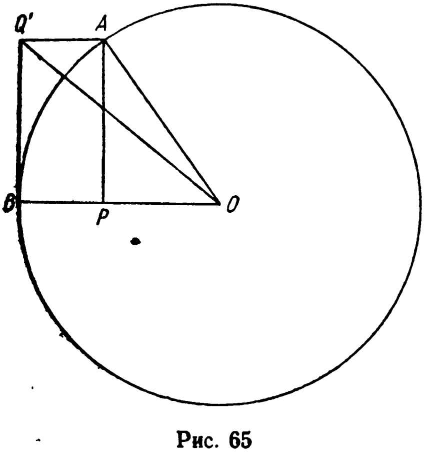


Рис. 65

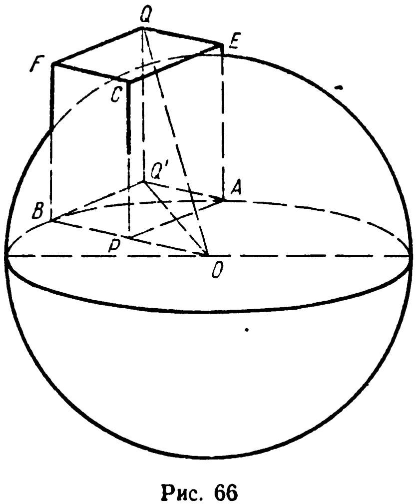


Рис. 66

останется на этой сфере и при произвольном положении точки P на сфере радиуса $|OP|$.

Из формулы для нахождения $|OQ|$ видно, что $|OQ|$ есть монотонная функция расстояния точки P от центра данного шара. Максимальное значение она принимает, когда точка P совпадает с центром шара. Тогда $|OP| = 0$ и, следовательно, $|OQ| = R\sqrt{3}$. Минимальное значение функция принимает, когда точка P лежит на данной сфере. Тогда $|OP| = R$ и, следовательно, $|OQ| = R$. Таким образом, множеством точек Q является множество точек полого шара радиуса $R\sqrt{3}$, концентрического данному шару, без внутренних точек данного шара.

172. Из условия следует, что два подмножества являются монотонно возрастающими последовательностями $(f(n))$ и $(g(n))$. Причем из соотношения для $g(n)$ вытекает, что $f(1) = 1$. Тогда $g(1) = f(f(1)) + 1 = f(1) + 1 = 2$ и, значит, $f(2) = 3$. Вообще каждое последующее значение функции $f(n)$ можно находить по ее предыдущему значению по формуле $f(f(n)) = f(n) + n - 1$, где $f(n)$ — предыдущее значение функции, а n — значение аргумента этого предыдущего значения. Тогда, очевидно, множества $f(n)$ и $g(n)$ не пересекаются.

$f(3) = f(2) + 2 - 1 = 3 + 1 = 4$; $f(4) = f(3) + 3 - 1 = 4 + 2 = 6$; $f(6) = f(4) + 4 - 1 = 6 + 3 = 9$; $f(9) = f(6) + 6 - 1 = 9 + 5 = 14$; $f(14) = f(9) + 9 - 1 = 14 + 8 = 22$; $f(22) = f(14) + 14 - 1 = 22 + 13 = 35$; $f(35) = f(22) + 22 - 1 = 35 + 21 = 56$; $f(56) = f(35) + 35 - 1 = 56 + 34 = 90$; $f(90) = f(56) + 56 - 1 = 90 + 55 = 145$; $f(145) = f(90) + 90 - 1 = 145 + 89 = 234$; $f(234) = f(145) + 145 - 1 = 234 + 144 = 378$

В такой цепочке нам надо найти значение аргумента, равное 240. Но $g(n)$ на 1 больше $f(f(n))$. Для нахождения нужного начала отступим от последней строки вверх на 4 строки. $f(35) = 56$. Значит, $g(35) = f(f(35)) + 1 = f(56) + 1 = 90 + 1 = 91$. Отсюда следует, что $f(57) = 92$. Тогда продолжим цепочку значений функции $f(n)$ по аналогии с предыдущей. $f(92) = f(57) + 57 - 1 = 92 + 56 = 148$; $f(148) = f(92) + 92 - 1 = 148 + 91 = 239$; $f(239) = f(148) + 148 - 1 = 239 + 148 = 386$.

Учитывая, что $g(148) = f(f(148)) + 1 = 387$, получаем, что $f(240)$ равно следующему натуральному числу, т. е. $f(240) = 388$.

173. Прежде всего отметим, что так как треугольник ABC равнобедренный, то центры всех трех окружностей лежат на его высоте AF и, следовательно, на диаметре AT, содержащем эту высоту. Точки P и Q симметричны относительно (AF). Поэтому $(PQ) \parallel (BC)$.

Обозначим $\widehat{BAT} = \alpha$; радиус круга, описанного около треугольника ABC, через R; центр круга, описанного около треугольника, через O; центр круга, вписанного в треугольник, через O_3; центр круга, касающегося боковых сторон треугольника и описанного круга, через O_1, а середину отрезка PQ через O_2 (рис. 67). Для доказательства утверждения найдем расстояние между (PQ) и (BC),

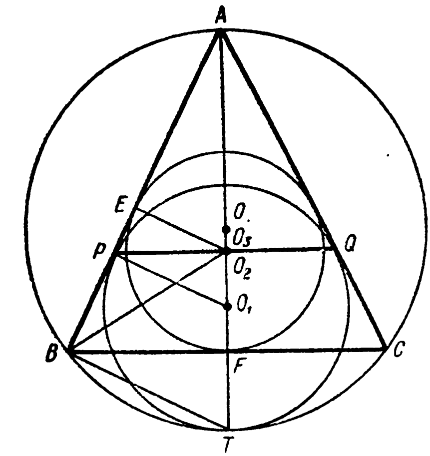


Рис. 67

а также радиус вписанного в треугольник круга. Если они окажутся равными, то это будет означать, что $O_3 \in (PQ)$.

$|AT| = 2R$, $\widehat{ABT} = 90°$. Следовательно, $|BT| = 2R \sin\alpha$.

Значит, $|TF| = |BT| \sin\alpha = 2R \sin^2\alpha$.

$|O_1T| = |O_1P| = R_1$; $|AO_1| = \frac{R_1}{\sin\alpha}$; $|AT| = |O_1T| + |O_1A|$;

$2R = R_1 + \frac{R_1}{\sin\alpha}$.

Отсюда $R_1 = \frac{2R\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$.

$|PO_2| = |PO_1|\cos\alpha = R_1\cos\alpha$; $|AO_2| = |PO_2| \cdot \operatorname{ctg}\alpha = R_1\cos\alpha \times \operatorname{ctg}\alpha = \frac{2R\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha}$.

$|AF| = 2R - |FT| = 2R - 2R\sin^2\alpha = 2R\cos^2\alpha$; $|FO_2| = |AF| - |AO_2| = 2R\cos^2\alpha - \frac{2R\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha} = \frac{2R\cos^2\alpha\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$.

Найдем радиус круга, вписанного в треугольник ABC.

ΔAFO_3, $|EO_3| = |FO_3| = r$; $|EO_3| \cdot |AO_3| \cdot \sin\alpha$; $|AO_3| = |AF| - |FO_3| = 2R\cos^2\alpha - r$; $r = (2R\cos^2\alpha - r)\sin\alpha$; $r + r\sin\alpha = 2R\cos^2\alpha\sin\alpha$; $r = \frac{2R\cos^2\alpha\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$.

Итак, центр вписанного в треугольник круга удален от (BC) на расстояние $r = \frac{2R\cos^2\alpha\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$ и расстояние между прямыми PQ и BC равно той же самой величине $|O_2F| = \frac{2R\cos^2\alpha\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$. Значит, этот центр лежит на прямой PQ.

174. Прежде всего заметим, что если $x_1 > x_2$ и $y_1 > y_2$, то $x_1y_1 + x_2y_2 > x_1y_2 + x_2y_1$. Действительно, рассмотрим разность $(x_1y_1 + x_2y_2) - (x_1y_2 + x_2y_1) = x_1(y_1 - y_2) - x_2(y_1 - y_2) = (y_1 - y_2)(x_1 - x_2) > 0$, так как оба множителя положительны, что и доказывает высказанное замечание.

Далее, если $k_1 < k_2$, то $\frac{1}{k_1^2} > \frac{1}{k_2^2}$, где $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$. Из $\frac{1}{k_1^2} > \frac{1}{k_2^2}$ и $a_{k_1} > a_{k_2}$ получаем:

$$\frac{a_{k_1}}{k_1^2} + \frac{a_{k_2}}{k_2^2} \geqslant \frac{a_{k_2}}{k_1^2} + \frac{a_{k_1}}{k_2^2}. \quad (*)$$

Переставим все a_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, в порядке их возрастания: $a_{k_1} < a_{k_2} < \ldots < a_{k_n}$. Тогда по неравенству (*) имеем: $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{k_i}}{i^2}$. Учитывая, что $a_{k_i} > i$, получаем требуемое неравенство.

175. В обществе ученых представлено 1978 человек из 6 стран. $1978 : 6 = 329 + \frac{2}{3}$. Отсюда следует, что существует страна A, от которой в обществе представлено не менее 330 человек. Будем считать, что ученые каждой страны в списке разбросаны случайным образом. Пусть упорядоченные номера членов от страны A будут $a_1, a_2, \ldots, a_{330}$. Причем $a_1 < a_2 < \ldots < a_{330}$. Рассмотрим разности $a_i - a_j$, где $i = 1, 2, \ldots, 330$, $j = 1, 2, \ldots, 329$, причем $a_i - a_j > 0$. Каждая из этих разностей меньше 1978 и, следовательно, равна номеру одного из участников общества. Если какая-либо разность $a_i - a_j$ равна номеру участника общества от страны A, то задача решена.

Если ни одна разность не равна номеру члена общества от страны A, то все эти разности принадлежат членам общества от других стран. Из всевозможных таких разностей выделим лишь разности между большим номером и последовательно остальными номерами. Их будет 329, а именно $a_{330} - a_1, a_{330} - a_2, \ldots, a_{330} - a_{329}$. Если докажем, что условие задачи будет выполнено для этих разностей, то задача будет решена. Так как эти 329 разностей принадлежат не более чем 5 странам, то найдется страна, например B, число номеров членов от которой не меньше $329 : 5 = 65\frac{4}{5}$, т. е. 66. Обозначим эти номера членов от страны B буквой a с двойным индексом: a_{k_i}, a_{k_j} — и рассмотрим разности $a_{k_i} - a_{k_j}$, удовлетворяющие тем же условиям, что и в первом случае. Если какая-либо из этих разностей принадлежит B, то задача решена. Действительно, $a_{k_i} - a_{k_j} \in B$, $a_{k_i} - a_{k_j} = (a_{330} - a_{k_j}) - (a_{330} - a_{k_i})$. Но $a_{330} - a_{k_j} \in B$, $a_{330} - a_{k_i} \in B$. Значит, номер участника $(a_{330} - a_{k_j})$ страны B равен сумме номеров $(a_{k_i} - a_{k_j})$ и $(a_{330} - a_{k_i})$ участников той же страны. Если нет, то выделим из них 65 номеров, равных разности самого большого из 66 номеров и каждого из остальных 65 номеров. Значит, эти 65 номеров не принадлежат ни A, ни B. Они принадлежат другим четырем странам. Следовательно, найдется страна, которой принадлежат $65 : 4 = 16\frac{1}{4}$, т. е. 17 номеров. Пусть это будет страна C. Рассмотрим аналогичные разности этих номеров. Если какая-нибудь из них принадлежит C, то задача решена, если нет, то они принадлежат остальным трем странам. Следовательно, найдется страна, которой принадлежит $17 : 3 = 5\frac{2}{3}$, т. е. 6 номеров. Пусть это будет страна D.

Составим из них новые разности. Если какая-либо из этих разностей принадлежит D, то задача решена, если нет, то выделим из них аналогично предыдущему 5 номеров. Значит, эти 5 номеров принадлежат оставшимся двум странам. Следовательно, найдется страна E, которой принадлежат не менее $5:2=2\frac{1}{2}$, т. е. 3 номеров. Составляем из них новые разности. Они обладают теми же свойствами, что и во всех предыдущих случаях, и, следовательно, если хоть одна из них принадлежит E, то задача решена. Если нет, то они принадлежат шестой стране F. Выделим из них две. Их разность равна номеру одного из участников общества. Вместе с тем она не может принадлежать ни одной из предыдущих стран. Следовательно, она принадлежит стране F. Задача решена.

* * *

В заключение я пользуюсь возможностью выразить свою искреннюю признательность академику А. Н. Колмогорову за весьма ценные для меня советы и замечания по рукописи пособия. Я признателен рецензентам рукописи пособия В. В. Петрову, Т. К. Шабашову и К. И. Шалимовой. Их замечания и пожелания позволили улучшить данное пособие.

В пособии приведены решения многих задач. Но при пользовании пособием следует иметь в виду, что каждое из приведенных решений является одним из возможных вариантов решения. Читатель может найти и другое решение возможно даже краткое и изящное.

Отзывы о пособии просим направлять по адресу: 129846, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41, издательство «Просвещение», редакция математики.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Акентьев В.* Смекалка. М., 1961.
2. *Бабинская И. Л.* Задачи математических олимпиад. М., 1975.
3. *Виленкин Н. Я.* Комбинаторика. М., 1969.
4. *Виленкин Н. Я.* Популярная комбинаторика. М., 1975.
5. *Германович П. Ю.* Сборник задач по математике на сообразительность. М., 1960.
6. *Гусев В. А., Орлов А. И., Розенталь А. Л.* Внеклассная работа по математике в 6—8 классах. М., 1977.
7. *Доморяд А. П.* Математические игры и развлечения. М., 1961.
8. *Зетель С. И.* Геометрия линейки и геометрия циркуля. М., 1957.
9. *Зубелевич Г. И.* Сборник задач московских математических олимпиад. М., 1971.
10. *Игнатьев В. А.* Внеклассная работа по математике в начальной школе. М., 1965.
11. *Игнатьев Е. И.* В царстве смекалки. М., 1978.
12. *Кордемский Б. А., Русалев Н. В.* Удивительный квадрат. М., 1952.
13. *Кордемский Б. А.* Математическая смекалка. М., 1954.
14. *Кюршак Й.* и др. Венгерские математические олимпиады. М., 1976.
15. *Леман В. А.* Сборник задач московских математических олимпиад. М., 1965.
16. *Линьков Г. И.* Внеклассная работа по математике в средней школе. М., 1954.
17. *Морозова Е. А., Петраков И. С., Скворцов В. А.* Международные математические олимпиады. М., 1976.
18. *Нагибин Ф. Ф.* Математическая шкатулка. М., 1958.
19. *Островский А. И.* 75 задач по элементарной математике — простых, но ... М., 1966.
20. *Островский А. И., Кордемский Б. А.* Геометрия помогает арифметике. М., 1960.
21. *Перельман Я. И.* Занимательная арифметика. М., 1959.
22. *Перельман Я. И.* Живая математика. М., 1967.
23. *Перельман Я. И.* Занимательная алгебра. М., 1974.
24. *Перельман Я. И.* Занимательная геометрия. М., 1959.
25. *Поляк Г. Б.* Занимательные задачи. М., 1957.
26. *Савин А. П.* и др. Физико-математические олимпиады. М., 1977.
27. *Сорокин П. И.* Занимательные задачи по математике. М., 1967.
28. *Страшевич С., Бровкин Е.* Польские математические олимпиады. М., 1978.
29. *Труднев В. П.* Внеклассная работа по математике в начальной школе. М., 1975.
30. *Фомин С. В.* Системы счисления. М., 1975.
31. *Шилов Г. Е.* Как строить графики. М., 1959.

СОДЕРЖАНИЕ

Иван Семенович Петраков

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

Редактор *Т. А. Бурмистрова*
Худож. редактор *Г. Н. Карасик*
Художник обложки *Б. Л. Николаев*
Технич. редакторы *Т. В. Самсонова, М. И. Смирнова*
Корректор *Р. Б. Штутман*

ИБ № 6095

Сдано в набор 24.06.81 г. Подписано к печати 25.11.81. $60\times90^1/_{16}$. Бум. типограф. № 3. Гарнит. литерат. Печать высокая. Усл. печ. л. 6. Усл. кр. отт. 6,25. Уч.-изд. л. 5,89. Тираж 455 тыс. экз. Заказ № 150. Цена 15 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Саратов, ул. Чернышевского, 59.